

ELETTROMAGNETISMO

Dalle lezioni del

Prof. Luigi Puccianti

Università di Pisa, Corso di Fisica Superiore

Anno Accademico 1949-50

(raccolte da Vasco Caini)

Siena, 2013

Note del curatore

Il prof. Luigi Puccianti¹ dava agli studenti dei gruppi di appunti che venivano copiati a mano da ciascuno. Gli appunti venivano corretti e ampliati ogni volta, pertanto presumo che ne siano stati consegnati altri nell'A.A. 1950-51 e forse anche nell'anno 1951-52, anno della morte del docente.

Il trattato qui ricostruito dalla mia copia manoscritta, pertanto può non essere l'ultima versione. Inoltre, data l'irregolarità con cui tali appunti venivano forniti e le ripetute trascrizioni, potranno probabilmente esserci errori, ripetizioni e lacune. Prego, se qualcuno ha degli appunti più recenti o completi, di comunicarmelo e, possibilmente, di passarmene le copie.

Qualche pagina è anche priva di formule. Manca qualche riga.

Ho riportato i numeri delle parti in cui l'opera è divisa anche quando non esistono antecedenti e seguenti, per facilitare il compito di individuare le parti mancanti a chi ha copie diverse o più recenti. I numeri di parti che appaiono mostrano un disordine apparente, ma la disposizione è sicuramente quella ufficiale nel 1950.

In dubbio tra particolarità di linguaggio del docente o errori di trascrizione, ho lasciato anche delle espressioni non comuni oggi. Ho lasciato anche frasi non corrette preferendo aspettare un originale piuttosto che fare una correzione arbitraria. Ho aggiunto solo le note biografiche.

Ho scritto a un nipote di Luigi Puccianti, con la speranza di trovare i testi originali, ma non ho avuto risposta.

L'originalità della trattazione sta soprattutto nell'introduzione all'elettrodinamica, classificata come cap. IV e seguenti, svolta con esperimenti elementari. Si tratta di un trattato *in fieri*, non completato per la morte dell'insigne docente, e che pertanto avrebbe bisogno di rifiniture e revisioni. Spero che qualcuno voglia fare quest'operazione che io, per l'età e abbandono del campo di lavoro, non sono più in grado di effettuare correttamente.

Ringrazio l'amico, dr. Lido Pacciardi, per la paziente e preziosa collaborazione tecnica e psicologica con cui mi ha assistito nella trascrizione di questi appunti.

Siena, 31 marzo 2013.

Vasco Caini

Via dei Pittori 5, 53100 Siena, Italy

ph. & fax: +39 0577 286633

e-mail: vcaini@hotmail.com

web: <http://www.rizal.it>

<http://www.xeniaeditrice.it>

<http://www.fargion.it>

<http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Mazawa>

¹ Luigi Puccianti, 1875-1952, fisico italiano. (v.: http://it.wikipedia.org/wiki/Luigi_Puccianti).

INTRODUZIONE

5 Questo trattato si attiene strettamente al classico metodo galileiano: prende cioè
in considerazione enti fisici *reali* (autenticamente reali) e su di essi ragiona con l'aiuto
di enti matematici *astratti* (sinceramente astratti), escludendo qualunque ente fittizio.
Si parlerà dunque da un lato di carica elettrica, di corpi conduttori e isolanti, dall'altro
lato di scalari, di vettori, di campi vettoriali, ecc.; ma ci asterremo di parlare dell'ete-
re. Che l'etere (quale è stato posto a base di teorie fisiche) sia un ente fittizio, lo mo-
10 stra l'incostanza del significato, anzi l'incoerenza dei vari significati di questa parola
attraverso lo sviluppo della Fisica; dopo l'avvento della teoria elettromagnetica della
luce, con questa parola si intese generalmente significare un ipotetico mezzo riem-
piante tutto lo spazio e dotato di proprietà elettriche e magnetiche analoghe a quelle
dei corpi, ovvero lo spazio stesso in quanto dotato di tale proprietà. Di questa ipotesi
15 si può fare a meno, anzi è preferibile farne a meno per il nostro intento. In altre paro-
le, noi non consideriamo i campi vettoriali elettrici e magnetici nello spazio libero da
corpi come modificazioni di un mezzo fisico ipotetico che lo riempia, sibbene li con-
sideriamo puramente e semplicemente come strumenti matematici, che ci servono per
il nostro compito di formulare leggi *vere* e *utili* alla previsione dei fatti.

20 Questo metodo in linea generale, ma quel che conta è la sua attuazione in questo
trattato; di essa vogliamo ora dare un cenno sommario, prendendo le mosse da con-
cetti assai noti, indicando alcune conseguenze, quelle che sono caratteristiche del
nuovo orientamento, in confronto con l'orientamento tradizionale, presentando infine
uno schema sommario di tutta la trattazione.

25 Ciò che sarà affermato in questa *introduzione* e non sia già comunemente noto,
che anzi possa a prima giunta sembrare eterodosso e paradossale, sarà giustificato
nello sviluppo della trattazione stessa.

PRELIMINARI

Non introduciamo l'etere essendo questo un ente fittizio. Due cariche elettriche in quiete¹ interagiscono tra loro: in ciò consistono le *azioni elettrostatiche*. Per illustrare matematicamente tali interazioni si attribuiscono col pensiero due diversi uffici all'una e all'altra carica: l'una si pensa come agente esploratore, di un campo vettoriale di forze (concetto astratto matematico) l'altra come produttore di esso e viceversa.

Il campo di forza prodotto da una carica in quiete è un campo newtoniano. La carica *coincide con la sua divergenza, il rotazionale è nullo*.

Cariche elettriche in moto costituiscono una corrente elettrica.

Cominciamo a considerare due correnti rientranti lungo due conduttori chiusi. Due di tali correnti interagiscono tra di loro: azioni elettrodinamiche. L'una o l'altra corrente scelta a piacere si pensa come agente esploratore del campo di forza prodotto dall'altra o dall'una. Questo campo di forze non è più newtoniano. *La sua divergenza è nulla. Il suo rotazionale coincide con la corrente produttrice*².

La descrizione esatta del campo di forza nel caso elettrostatico è facile, molto più difficile è nel caso elettrodinamico di cui ci occuperemo. Noi abbiamo anticipato qualcosa della sua soluzione, ma esso è il problema fondamentale di cui ci dovremo occupare.

Mentre nel caso elettrostatico la forza agente sopra una piccola carica esploratrice dà direttamente il vettore in ciascun punto del campo, nel caso elettrodinamico è un oggetto più complesso. Si può usare a tal fine una maglia di filo sottile percorsa da corrente e dalla determinazione del momento meccanico che essa risente per varie orientazioni del suo piano ricavare il vettore. Più comodo usare le correnti indotte per effetto delle variazioni della corrente che produce il campo. I due metodi sono equivalenti quanto al risultato. Con entrambi il campo vettoriale viene determinato solo per mezzo dei valori del suo flusso traverso areole variamente orientate nell'intorno di ciascun punto. Poiché per lo studio generale del campo bastano esperienze integrali, noi misuriamo il flusso traversante aree estese e anche altri sistemi, di moltissime areole opportunamente disposte.

Così ritroveremo speditamente e direttamente le classiche leggi dell'elettrodinamica e, come loro conseguenza, le leggi generali di quei fenomeni che pur considerati, come noi li consideriamo, di natura elettrodinamica, possono ancora raccogliersi sotto il vecchio nome di magnetismo.

Ma nella storia della fisica il magnetismo si è presentato sotto un aspetto del tutto diverso. Perché uno di quegli aggregati di correnti elettriche che si chiamano comunemente calamite o magneti dà nello spazio circostante, esplorato con un altro di essi, l'apparenza di un campo Newtoniano; e ciò ha fatto immaginare l'esistenza in certe

¹ Per essere precisi, in quiete rispetto al riferimento che serve per la meccanica degli esperimenti, supposto inerziale, qual è approssimativamente la terra.

² Basta che il lettore richiami alla memoria le più semplici e classiche esperienze, quelle elettrostatiche di Coulomb, quelle elettrodinamiche di Ampère, per riconoscere che questa profonda differenza geometrica tra i due campi vettoriali è *ab initio* nelle esperienze stesse, che si eseguono con le prime con piccole palline, le seconde con fili sottili.

parti della superficie, o del volume interno, di un agente Newtoniano che fu detto massa magnetica o addirittura magnetismo.

Questa concezione riassume i risultati delle esperienze magnetiche di Coulomb e può essere conciliata con l'esperimento della calamita spezzata: è insomma incapace di inquadrare in una teoria formalmente analoga all'elettrostatica i fatti magnetici noti, prima che si scoprisse la loro vera parentela con quelli elettrici. Ampère¹ fino dal 1811 si rese conto della giusta essenza dei fenomeni, ma l'abitudine a considerare il campo magnetico come campo Newtoniano era troppo radicata nelle menti e troppo conforme al modo di pensare del tempo. La formula analoga fra elettrostatica e magnetica sembrava troppo allettante perché la vecchia concezione fosse allora tolta di mezzo dalla nuova concezione amperiana, essa seguitò anzi a svilupparsi in una bella forma matematica così che ne risultò, invece di un'unificazione generalmente accettata dagli scienziati, una specie di dualismo tra il campo magnetico delle correnti e il campo magnetico dei magneti².

Siccome un corpo magnetico diviene un magnete se è immerso in un campo magnetico prodotto da un altro magnete o da una corrente, tale dualismo inevitabilmente fu posto in relazione con le proprietà magnetiche dei corpi e, secondo l'accennata analogia con l'elettrostatica, queste stesse proprietà furono messe in corrispondenza con le proprietà elettriche degli isolanti e tutto questo insieme dottrinale si fuse nella rappresentazione dei fenomeni mediante due coppie di vettori i magnetici \mathbf{H} e \mathbf{B} e gli elettrici \mathbf{E} e \mathbf{D} e due scalari l'elettrico ε e il magnetico μ .

Siccome questi enti restano, per quanto diversamente interpretati, nella nostra trattazione, e vi hanno anzi parte importantissima, così avvertiamo fin da ora che l'espressione *campo elettrico* significherà per noi non l'uno o l'altro dei campi vettoriali \mathbf{E} o \mathbf{D} , ma l'insieme dei due e comprenderà anzi un terzo campo vettoriale ad essi collegato. E così per il *campo magnetico*.

Tradizionalmente si scrive: $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ con \mathbf{B} , \mathbf{H} , μ , enti analoghi corrispondenti a \mathbf{D} , \mathbf{E} , ε ; invero ai vettori \mathbf{H} ed \mathbf{E} si attribuisce lo stesso carattere di campi di forza (\mathbf{H} è detto forza magnetica, \mathbf{E} forza elettrica). E ciò è logica conseguenza di quella concezione che si riporta alla conoscenza del campo magnetico per mezzo di un ago magnetico la quale dà in qualunque mezzo, per risultato, il valore di \mathbf{H} , come quella del campo elettrico mediante una carica dà in qualunque mezzo isolante il valore di \mathbf{E} .

Invece secondo la concezione elettrodinamica, l'esplorazione del campo magnetico s'intende fatta o con una spira percorsa da corrente o per mezzo di esperimenti d'induzione, e tale esplorazione dà in qualunque mezzo il valore di \mathbf{B} e quindi al campo di questo vettore, invece che a quello di \mathbf{H} , spetterà il carattere di campo di forza come quello di \mathbf{E} .

¹ André-Marie Ampère, 1775-1836, fisico francese.

² Dualismo come vedremo non felicemente sanato dal *principio di equivalenza* tra lamina magnetica e maglia percorsa da correnti, e ne nacquero difficoltà e complicazioni, le quali si mostrano ora come ombre oscure nel pur tanto luminoso sviluppo dell'elettrologia durante un secolo.

Questa concezione, che viene nel presente trattato accettata con tutte le conseguenze, porta ad escludere le analogie e sovvertire la corrispondenza ora indicata e a scrivere le stesse relazioni in maniera diversa:

$$5 \quad \mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \mathbf{E} = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}$$

Intendo che gli elementi corrispondenti fra loro sono \mathbf{B} ed \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{D} , μ^{-1} ed ε , ovvero μ ed ε^{-1} .

10 Non mi dissimulo che questo sia il punto più rivoluzionario della teoria, quello a cui giunti, può venire la voglia di fare un passo indietro; ma nel presente trattato ci arriveremo con adeguata preparazione. Seguiremo lo schema che segue.

1) In brevi preliminari matematici, destinati a fissare notazioni e ricordare formule vettoriali, sarà tra l'altro precisata la relazione tra campi newtoniani e circuitali, e ciò servirà poi a chiarire il malinteso della *equivalenza*.

15 2) D'altra parte un breve riassunto di risultati sperimentali servirà a dimostrare che la corrente elettrica è sempre movimento di cariche (cioè in ultima analisi convettiva sia nei conduttori che negli isolanti). In quest'ultimo caso chiariremo la relazione tra \mathbf{E} e \mathbf{D} mediante l'interpretazione realistica della conduttività elettrica e ciò permetterà una revisione del concetto Maxwelliano di corrente di spostamento.

20 3) Stabiliremo le leggi fondamentali dei fenomeni elettrodinamici e qui apparirà chiaro che il secolo trascorso dalla celebre memoria di Ampère (nonostante i deviazioni concettuali ora accennati) non è trascorso invano, nemmeno per la trattazione di quello stesso problema di cui il grande scienziato, con un prodigioso sforzo sperimentale e matematico, dette una soluzione nella sua formula forse più celebre che usata. I fenomeni d'induzione, la moderna tecnica sperimentale e la teoria dei campi vettoriali ci permetteranno di essere amperiani nella sostanza e moderni nella forma e anche nella scelta della soluzione.

30 Abbiamo già accennato al genere di esperimenti che saranno usati a tal uopo; e abbiamo già detto che la risoluzione di questo primo problema sarà per noi il punto di partenza per la teoria generale dei fenomeni magnetici. S'inizierà considerando l'influenza del mezzo ambiente corporeo sulle azioni elettrodinamiche. Le correnti di Ampère saranno il fondamento di questa teoria: fondamento realistico poiché sappiamo che tutti i corpi possiedono nell'interno cariche elettriche in movimento ed è manifesto che tale movimento viene modificato dalle azioni elettrodinamiche provenienti dall'esterno. Eviteremo l'introduzione dell'ente fittizio detto *magnetismo* nel senso di agente Newtoniano.

40 Che si tratti veramente di un ente fittizio si ricava anche dalle più moderne trattazioni tradizionali le quali mettono in conto solo il *magnetismo libero* e affermano non esistente il *magnetismo vero*. Naturalmente secondo la teoria elettrodinamica gli enti vettoriali e scalari hanno un'interpretazione decisamente diversa dalla tradizionale; ma ciò non toglie che in essa debba inquadrarsi quanto di vero è contenuto anche nella vecchia *magnetostatica*; e tale inquadramento ci porrà in un nuovo e diverso aspetto il problema della equivalenza e ne fornirà una nuova e diversa soluzione, la vera.

8) Affinché tutto ciò (e altro che qui non possiamo nemmeno accennare) risulti ben chiaro è, se non necessario, molto opportuno non essere legati ai soliti sistemi di misura elettrostatica che pone \mathbf{E} e \mathbf{D} omogenei (e \mathbf{B} e \mathbf{H} pure omogenei). Col metodo di Giorgi¹ useremo quattro unità fondamentali.

5 9) Così, l'introduzione che faremo dei vettori \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 , le sottili distinzioni tra i vari enti vettoriali e scalari, le loro interpretazioni, e infine il significato, la portata e la ragione vera della nuova corrispondenza tra gli enti magnetici ed elettrostatici, non offriranno altra difficoltà che quella di liberarsi di una inveterata abitudine e non lasceranno dubbi.

10 Fino a questo punto la forza elettromotrice indotta da variazioni nel tempo del campo magnetico è mezzo, non fine; il vero aspetto della trattazione è il campo magnetico costante e la sua rappresentazione matematica mediante campi vettoriali collegati fra loro: e ciò non in analogia, ma in confronto con la rappresentazione secondo lo stesso metodo del campo elettrostatico. A questo punto s'impone l'estensione ai
15 campi variabili nel tempo. Essa è già preparata: da un lato il già illustrato carattere convettivo della corrente porta a considerare il campo magnetico come prodotto da cariche elettriche in moto ed agente su cariche elettriche in moto, e lo pone così in relazione nel tempo con il campo elettrico prodotto dalle cariche elettriche ed in particolare il caso già considerato della corrente elettrica nei corpi isolanti, sfocia nella
20 revisione del concetto Maxwelliano di corrente di spostamento. D'altra parte le forze elettromotrici indotte da semplice mezzo diventano fine e aspetto della trattazione nella quale s'inserisce così un nuovo campo di forza elettrica, non già Newtoniano, ma circuitale, il cui rotazionale coincide con la variazione nel tempo della forza magnetica. I due campi che potrebbero dirsi coulombiano e faradiano si compongono
25 così nel totale campo elettrico. Il problema sarà ora di inquadrare le equazioni del Maxwell nella nostra trattazione e ciò sarà fatto senza introdurre elementi fittizi.

Infine mostreremo la speciale importanza che presenta la celebre esperienza di Fizeau interpretata con la relatività. Essa mostra che la velocità c della luce ha lo
30 stesso valore rispetto a qualunque riferimento inerziale, se nel vuoto; se in un mezzo di indice di rifrazione n ha la velocità c/n ; rispetto ad un altro sistema si assume il valore risultante relativisticamente da c/n con quella V del mezzo corporeo in esame.

¹ Giovanni Giorgi, 1871-1950, ingegnere e fisico italiano, ideatore del sistema di unità di misura che porta il suo nome.

PRELIMINARI MATEMATICI

Rappresenteremo il vettore: \mathbf{A} , \mathbf{a}

versore: \mathbf{A}_u , \mathbf{a}_u $u = \text{unitario}$

5 il suo modulo con: $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{a}|$ o con A .

Un campo vettoriale con la lettera indicante il vettore variabile da punto a punto (vettore funzione del punto) $[\mathbf{A}]$.

10 Il vettore spostamento di un punto P da un punto O cioè il segmento orientato da O a P con $(O \rightarrow P)$. Si userà il vettore area: l'area è supposta piana (se infinitesima sostituita con la proiezione sul piano tangente alla superficie a cui appartiene), il modulo del vettore area è la misura dell'area stessa, il versore è dato dalla normale con un verso assegnato il quale, se si sono distinte due pagine, una positiva e l'altra negativa, si assumerà dalla negativa alla positiva.

15 Useremo la somma e sottrazione vettoriale, prodotto di un vettore per uno scalare, scalare per un vettore. Conveniamo che l'orientazione di \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{AB} concordino con il pollice, indice, medio della mano destra. Prodotto misto o trivettore o regola del parallelepipedo.

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \wedge \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

20 Infatti $(O \rightarrow P) \wedge (O \rightarrow Q) \times (O \rightarrow R)$ esprime la misura del parallelepipedo se $(O \rightarrow P)$, $(O \rightarrow Q)$, $(O \rightarrow R)$ coincidono con il pollice, indice e medio della destra.

I componenti vettoriali di un vettore secondo tre assi ortogonali x, y, z ,

$$\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z = \mathbf{A}$$

Le componenti scalari: $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = A$

25 Noi seguiremo la convenzione che il pollice, indice e medio della destra coincidano con i versi positivi di x, y, z .

Il prodotto scalare espresso per mezzo delle componenti si scrive:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

E anche: $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ha per componenti i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

30 Il trivettore $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ è espresso dal determinante

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

35 ?) Operazioni infinitesimali.

Derivata di un vettore $\mathbf{A}(t)$ funzione di uno scalare t

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t)}{h}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{A} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)$$

Integrale di un vettore $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A} dt = - \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{A} dt$

5

?) Campi vettoriali.

Si ha un campo vettoriale quando per ogni punto di una certa regione, che può anche essere tutto lo spazio, è definito un valore del vettore \mathbf{A} che è pertanto funzione del punto. Indicheremo con $[\mathbf{A}]$ il campo vettoriale. La regolarità consiste nel poter definire gli enti e le operazioni infinitesimali che qui vengono considerati.

10

?) Linee di flusso.

È una linea che, punto per punto, ha per tangente la direzione del vettore in quel punto. Esse ammettono in ogni punto la tangente ed essa ha la direzione del vettore competente a quel punto. Per la *regolarità* ammettiamo inoltre che per ogni punto generico del campo passi *una sola linea di flusso* e che l'insieme delle linee di flusso passanti per i punti di un contorno formino una superficie tubolare la quale è detta *tubo di flusso*. In un campo vettoriale $[\mathbf{A}]$ si considerano i seguenti enti integrali.

15

20 ?) Integrale scalare di linea.

(Scalare s = lunghezza della linea; ds elemento lineare)

Se s_1 corrisponde al punto P, s_2 al punto Q, si scrive:

$$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{A} \cdot ds = - \int_{s_2}^{s_1} \mathbf{A} \cdot ds = - \int_Q^P \mathbf{A} \cdot ds = \int_P^Q \mathbf{A} \cdot ds$$

25

?) Circuitazione.

$\oint \mathbf{A} \cdot ds$ (Se \oint esteso ad una linea chiusa è nullo, il campo ammette potenziale).

Il segno dipende dal verso secondo cui è percorsa la linea chiusa rispetto all'assegnato verso positivo.

30

?) Integrale vettoriale di linea. (aperta o chiusa)

$$\int \mathbf{A} \wedge ds \quad \text{oppure} \quad \oint \mathbf{A} \wedge ds$$

?) Integrale scalare di superficie detto flusso. (da elemento vettoriale dell'area a)

$$\Phi(\mathbf{A}) = \int_a \mathbf{A} \cdot ds$$

35

Per il flusso useremo la notazione $\Phi[\mathbf{A}]$ o semplicemente Φ , se non vi è ambiguità: il segno si inverte cambiando segno alle due facce supposte distinte, cioè cambiando verso alla normale. Se la superficie è chiusa, dicesi flusso uscente oppure entrante secondo che la pagina esterna si assuma positiva o negativa.

40

?) Espressione cartesiana dell'integrale scalare di linea.

$$\int A_x dx + \int A_y dy + \int A_z dz \quad (\mathbf{A} \cdot ds = A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

?) Espressione cartesiana del flusso.

$$\iint A_x dydz + \iint A_y dx dz + \iint A_z dx dy$$

In un campo vettoriale $[A]$ si considerano gli elementi infinitesimali seguenti:

5

?) Divergenza. (scalare)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{A})}{\tau} \quad \left(= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

Per qualunque superficie a (da verso l'esterno) racchiudente un volume τ vale l'identità (Gauss)

10

$$\int_a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau$$

cioè il flusso esteso ad una superficie è uguale alla divergenza estesa al volume racchiuso.

?) Rotazionale. (vettore detto anche rotore o vortice): $\operatorname{rot} \mathbf{A}$.

15

Per una generica linea chiusa s e per una qualunque superficie a avente s per contorno, vale il teorema di Stokes

$$\oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_a \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

(è convenuto che guardando la pagina negativa della superficie, il verso positivo del contorno s appaia orario).

20

?) Campo lamellare.

Nel campo lamellare per ogni linea chiusa, ovvero per ogni punto è rispettivamente

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$$

25

In tal caso scriveremo

$$\int_p^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = V(P) - V(Q)$$

Indicando con V (scalare) funzione monodroma del punto, detta funzione del campo; se si tratta di un campo di forze dicesi potenziale, denominazione che si suole usare per estensione anche per altre specie di campi. Il vettore \mathbf{A} dicesi gradiente

30

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} V$$

Se il campo non è lamellare può avvenire che esista un potenziale polidromo che, per distinguere questo caso dal precedente, indicheremo con \mathcal{V} . Sarà allora

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \mathcal{V}$$

35

?) Campo solenoidale.

Dicesi campo solenoidale quello nel quale per ogni superficie chiusa è

$$\Phi[\mathbf{A}] = \int_a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

ovvero per ogni punto è $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

40

In tal caso, dato il campo, basta a determinare il flusso il solo contorno entro cui passa, perché il flusso è costante per ogni superficie su quel contorno.

?) Componente del vettore nella orientazione s espressa per il potenziale

$$A_s = - \frac{dV}{ds} \quad (\text{gradiente})$$

?) Componenti cartesiane espresse per il potenziale:

$$A_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad A_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad A_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

5

?) Espressione cartesiana della divergenza per mezzo del potenziale

$$\text{div} \mathbf{A} = - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = - \nabla^2 V$$

?) Quadrato del modulo.

$$A^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2$$

10

?) Espressione cartesiana della componenti del rotazionale.

I minori della matrice simbolica

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} .$$

15

Il campo del vettore rotazionale è *solenoidale*. ($\text{div} \text{rot} \mathbf{A} = 0$)

Se il campo vettoriale $[\mathbf{A}]$ ammette superficie di discontinuità, indicando con A^+ e A^- per uno stesso punto della superficie i valori limiti alla pagina positiva e negativa e distinguendo con gli indici n e t i campi normale e tangenziale, si definiscono i due enti, uno scalare e l'altro vettoriale, seguenti:

20

?) Divergenza superficiale.

$$\text{div}_a \mathbf{A} = (A_n^+ - A_n^-) = \left(\frac{dV}{dn} \right)^- - \left(\frac{dV}{dn} \right)^+ \quad 1$$

E la precedente relazione tra flusso e divergenza si scrive:

$$\Phi = \int_a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathbf{t}} \text{div} \mathbf{A} d\mathbf{t} = \int_{a'} \text{div} \mathbf{A} da'$$

25

dove l'ultimo integrale è esteso alla porzione a' della superficie di discontinuità contenuta entro la superficie chiusa considerata \mathbf{a} .

?) Rotazionale superficiale.

$$\text{rot}_a \mathbf{A} = \mathbf{n}_u \wedge (\mathbf{A}_t^+ - \mathbf{A}_t^-)$$

30

dove con \mathbf{n}_u si è indicato il versore della normale onde per il salto del componente tangenziale del vettore risulta

$$\mathbf{A}_t^+ - \mathbf{A}_t^- = (\text{rot}_a \mathbf{A}_1) \mathbf{n}_u$$

Lo scambio dei segni $+$ e $-$ lascia invariato $\text{rot}_a \mathbf{A}$.

¹ Avvertiamo che il verso $+$ della normale può essere preso ad arbitrio, non così il segno di divergenza la quale non dipende dalla scelta: infatti invertendo il segno della normale al posto di A_n^+ dovrà porsi il valore che aveva A_n^- cambiato di segno, cioè $-A_n^-$ e al posto di A_n^- si porrà $-A_n^+$ e si ottiene lo stesso valore con la stessa notazione formale.

In seguito a ciò il teorema di Stokes si generalizza:

$$\oint_{\text{lineare}} \mathbf{A} \times d\mathbf{s} = \int_a^{\text{superficiale}} \text{rot} \mathbf{A} \times d\mathbf{a} + \int_{s'}^{\text{lineare}} (\text{rot}_a \mathbf{A}) \wedge \mathbf{n}_u \times d\mathbf{s}'$$

5 Essendo s' la linea di intersezione della superficie a con la superficie di discontinuità.

La divergenza e il rotazionale superficiale si possono considerare come casi limiti dei corrispondenti enti volumici esistenti in uno strato il cui spessore inizialmente finito tende a svanire, mentre in corrispondenza aumenta oltre ogni limite il valore scalare e vettoriale rispettivamente degli enti stessi. Cosicché le due formule integrali ora completate non sono che casi limite delle precedenti.

10 Procedendo ancora per tal via con considerazioni di limiti, si può giungere alla *divergenza lineare* o *rotazionale lineare*; il primo di tali enti non presenta però serio interesse, perché non è suscettibile di utili applicazioni; il secondo al contrario è assai importante e avrà naturalmente parte in quello che segue.

15 Infine si perviene anche come concetto limite, che ha pure grande importanza in quel che segue, alla *div puntiforme*. È manifesto che non avrebbe senso di parlare di rotazionale puntiforme.

20 Le operazioni qui passate in rivista godono delle proprietà distributive rispetto alla somma e quindi a tutti gli enti scalari e vettoriali ora considerati si può applicare il principio della composizione dei campi vettoriali.

?) Lemma di green.

25 Essendo U e V due scalari funzioni dei punti definiti entro un campo volumico τ e sulla superficie a che lo racchiude completamente (normale \mathbf{n} verso l'interno) questa proposizione consiste nella identità

$$\int_a V \frac{dU}{dn} da = \int_{\tau} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau + \int_{\tau} V \nabla^2 U d\tau$$

Nel caso particolare che sia $U = V$, avremo

$$\int_a V \frac{dV}{dn} da = \int_{\tau} \nabla V d\tau + \int_{\tau} V \nabla^2 V d\tau$$

30 ?) Condizione sufficiente per l'annullamento di un campo vettoriale. (teorema di unicità)

Consideriamo un campo vettoriale regolare $[\mathbf{A}]$ e ammettiamo che esso sia lamellare cioè

$$\mathbf{A} = \text{grad} V \quad (\text{div} \mathbf{A} = 0)$$

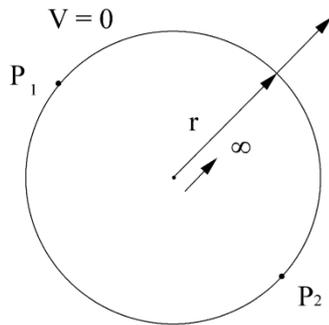
35 Per questa funzione V , per una qualsiasi superficie a e per lo spazio τ in essa compreso, consideriamo la seconda delle precedenti identità

$$\int_a V \frac{dV}{dn} da = \int_{\tau} \nabla V d\tau = \int_{\tau} A^2 d\tau$$

D'altra parte è facile trovare due condizioni sufficienti, sia l'una che l'altra, per l'annullamento del primo membro:

40 1) Che sia nulla in tutta la superficie la componente normale

$$A_n = 0 = - \frac{dV}{dn} \quad : \text{ciò è manifesto.}$$



2) Che sia nulla in tutta la superficie la componente tangenziale, cioè sulla superficie stessa $v = \text{cost}$, perché solo allora la derivata è nulla perché in tal caso V si può portare fuori del segno di integrazione; e siccome è (per Gauss)

$$\int_a \frac{dV}{dn} da = - \int_{\tau} \text{div} \mathbf{A} d\tau = 0,$$

per la relazione fra flusso e div di Gauss, risulta pure nullo il primo membro. Poiché basta che siano nulle o la componente normale o quella tangenziale, a maggior ragione,

10 è condizione sufficiente che il vettore sia nullo su tutta la superficie.

Soddisfatta una di tali condizioni (essendo A^2 essenzialmente positivo poiché è somma di quadrati), risulta in tutto lo spazio τ nullo il vettore \mathbf{A} .

15 Se invece di un esatto annullamento sulla superficie si tratta di un'evanescenza a grande distanza è pure facile stabilire una condizione sufficiente di annullamento del campo vettoriale.

Consideriamo una sfera di punto fisso e raggio r crescente oltre ogni limite. Avvertiamo che, siccome la funzione V del campo è determinata solo a meno di una costante additiva, potremo assumere $V = 0$ in un punto della sfera cosicché in un altro punto qualsiasi il valore assoluto di V^1 risulterà minore di $\pi r |A_t^*|$ essendo

20 $|A_t^*|$ il valore assoluto massimo (o limite superiore) della componente tangenziale, indicando ancora con $|A_n^*|$ il valore assoluto massimo (o limite superiore) della componente normale, ne risulta per il primo membro il limite superiore

$$\int_a \pi r |A_t^*| |A_n^*| da = 4\pi^2 |r^3| |A_t^*| |A_n^*|$$

25 E indicando con A_M il valore massimo della sfera (o limite superiore) del modulo del vettore sarà

$$|A_t^*| |A_n^*| < A_M^2$$

Potremo dunque scrivere

$$\int_{\tau} A^2 d\tau < 4\pi r^3 A_M^2$$

$$1/r \text{ infinitesimo} \quad \lim_{\left(\frac{1}{r}\right)^2} \frac{A_M}{3} = 0$$

30 se col crescere di r come infinito del primo ordine, \mathbf{A} svanisce come infinito di ordine superiore a $3/2$, dovendo il primo membro, che è positivo, risultare inferiore a qualsiasi quantità assegnabile, ne segue in tutto il campo.

$$\mathbf{A} = 0^2$$

¹ V al punto di potenziale più alto V^* può passare per due strade segmenti di circonferenza. $\int \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{x} ds$ avranno per esse uguale valore perché $\oint = 0 (=V-V)$. Per la più corta ($\leq \pi r$) sarà $\int \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{x} ds \leq \int \mathbf{A}_t^* \cdot \mathbf{x} ds$.

² In conclusione un campo vettoriale tale che al crescere della distanza da qualsiasi punto prefissato il modulo svanisca come infinitesimo di ordine superiore a $3/2$ non può essere insieme lamellare e solenoidale se non essendo nullo. Ciò suggerisce di considerare la div e i rot come strettamente connessi con le cause fisiche del campo e i loro valori come misura dell'entità di queste cause che nel caso nostro saranno rispettivamente la carica elettrica e la corrente elettrica per il campo elettrico e per il campo magnetico $\text{div} \mathbf{E} = 4\pi e$; $\text{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{i}$. È naturale pensare che nel caso in cui il campo non svanisca a grande distanza (nel qual caso esso non può essere nullo anche se lamellare e solenoidale insieme, per es. in un campo uniforme) le regioni di div e rot si trovino a grandissima distanza cioè non siano direttamente accessibili agli oggetti fisici causa del campo (cariche e correnti all'infinito).

?) Unicità del campo vettoriale limitato o evanescente.

(ordine $3/2$ rispetto a $1/r$) all'infinito quando siano assegnati i valori in ciascun punto della divergenza e del rotazionale.

5 Supponiamo di avere due campi vettoriali \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 e che sia sempre

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_1 = \operatorname{div}\mathbf{A}_2 \quad \operatorname{rot}\mathbf{A}_1 = \operatorname{rot}\mathbf{A}_2$$

differenza delle divergenze = divergenza differente

differenza dei rotazionale = rotazionale differente.

10 Perciò se le divergenze e i rotazionali sono singolarmente nulli sarà nullo anche il vettore differenza cioè sarà nullo il campo del vettore \mathbf{D} e che inoltre, tanto l'uno che l'altro, soddisfino alla detta condizione asintotica, e cioè che svaniscano all'infinito con ordine superiore a $3/2$. Consideriamo il campo del rotore $\mathbf{D} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$. È manifesto, per il teorema precedente, che esso sarà nullo in tutti i punti e quindi in tutti i punti sarà pure

15
$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$$

A parole: *un campo vettoriale regolare evanescente all'infinito con l'ordine di infinitesimo superiore a $3/2$ risulta univocamente determinato quando sia assegnato in ogni punto (al finito) il valore della divergenza e del rotore.*

20 S'intende che ciò vale non solo per divergenze e rotazionali volumici, ma anche superficiali.

?) Osservazioni.

25 Fino ad ora il problema di cui ci siamo occupati in linea generale è stato quello di trovare le divergenze e i rotazionali essendo dato il campo, ora vediamo che, sotto la detta condizione di evanescenza all'infinito, il problema inverso (dati div e rot trovare il campo) è problema determinato che ammette anzi una unica soluzione.

30 I due problemi, (uno inverso dell'altro) sono di centrale importanza nelle teorie fisiche perché gli enti matematici div e rot sono in diretta e strettissima relazione con gli oggetti fisici i quali producono quelle azioni a distanza che appunto i campi vettoriali permettono di calcolare.

35 Se dalla conoscenza degli effetti cioè esplorazione del campo, si vuole risalire alle cause, cioè alla valutazione e localizzazione delle div e rot si presenta il problema già studiato; se dalle cause div e rot si vuol calcolare gli effetti (cioè il campo), si presenta il problema inverso. Per questo cominciamo dal caso particolare della determinazione del campo lamellare (rot nullo da per tutto) data la divergenza; poi verremo al caso della determinazione di un campo solenoidale (div = 0 da per tutto) dato il rot. Infine il campo risultante di due, l'uno corrispondente al primo caso l'altro al secondo, dà la soluzione del problema generale.

40 ?) Campi newtoniani.

Sotto questo nome comprenderemo tutti i campi lamellari (o conservativi) ($\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$) dotati di divergenza non nulla entro una regione limitata, nulla nel restante spazio, i quali soddisfino alla condizione che il modulo del vettore a distanza infinita dalla regione di divergenza divenga infinitesima di ordine superiore a $3/2$.

Ricordiamo dal paragrafo 4), (teorema di Gauss)

$$\Phi_a = \int_a \mathbf{A} d\mathbf{a} = \int_\tau \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau$$

5 nella quale il primo membro esprime il flusso uscente da una qualsivoglia superficie chiusa a e l'integrale del secondo membro è esteso al volume interno a questa superficie.

10 Se la superficie è tutta esterna alla regione di divergenza non nulla, il volume τ sarà in effetto quello di questa regione in cui la div è diversa da zero, al di fuori della quale l'integrale avrebbe termini tutti nulli dunque fissato il flusso uscente dalla superficie completamente esterna alla regione di divergenza ha per tutte uno stesso valore.

15 Ciò nondimeno il campo vettoriale, ossia i valori del vettore \mathbf{A} punto per punto nello spazio circostante, dipendono anche, a parità del valore di $\int_\tau \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau$ dalla distribuzione dei valori di $\operatorname{div} \mathbf{A}$ entro la regione; cambiando questa il campo sarà alterato: ma è ovvio pensare¹ che queste alterazioni risulteranno piccole se piccole sono le dimensioni di essa regione.

20 Ciò stabilito, consideriamo il caso elementare, che cioè questa regione sia tutta compresa nell'interno piccolissimo di un certo punto O : il flusso avrebbe allora un valore piccolissimo, ma noi penseremo che nel piccolo intorno il valore della divergenza sia molto grande, in modo che il flusso risulti del comune ordine di grandezza; al limite avremo quello che può chiamarsi

?) Campo Newtoniano con regione di divergenza puntiforme.

25 Indichiamo con φ il valore (unico) del flusso uscente da tutte le superfici chiuse di dimensioni finite aventi nel loro interno il punto O . Esso può essere preso come valore della divergenza puntiforme. Assumendo φ come dato, poniamoci il problema di trovare per ogni punto del campo (escluso l'intorno di O) il valore del vettore \mathbf{A} . Una soluzione, che per il teorema ora dimostrato sarà l'unica soluzione essendo supposto che il campo svanisca (superiore a $3/2$), si presenta subito alla mente, se si considera una sfera di raggio r col centro O e si pensa al più semplice modo di soddisfare per essa la equazione

$$\int_a \mathbf{A} x d\mathbf{a} = \varphi$$

tale modo è manifestamente formato dal valore del punto P del vettore

$$\mathbf{A} = \frac{\varphi}{4\pi r^2} \mathbf{r}_n$$

35 essendo r il modulo ed \mathbf{r}_n il versore del raggio vettore OP . E si presenta come comodo per semplicità porre $\frac{\varphi}{4\pi} = m$ e quindi scrivere $\mathbf{A} = \frac{m}{r^2} \mathbf{r}_n$.

40 Si vede subito la coincidenza di questa formula con quella che in base alla legge di Newton esprime il vettore accelerazione che un qualunque corpo puntiforme acquista per effetto della presenza di un corpo puntiforme la cui massa sia misurata dal

¹ Ma l'intuito suggerisce, e in seguito sarà dimostrato, che tali alterazioni saranno evanescenti se è evanescente la regione di divergenza.

numero m nel sistema di misure astronomiche¹ salvo il verso di \mathbf{r}_n che in questo caso è l'opposto.

Ci si rende così ragione della denominazione di campo newtoniani e della scelta fatta con la lettera m la quale come nel caso della gravitazione misura la massa gravitante, ora così diremo che misura la massa agente: cioè la quantità dell'ente fisico che produce le azioni a distanza e che è, come abbiamo detto, in stretta relazione con la divergenza del campo vettoriale. Per la funzione o campo potenziale, abbiamo allora la espressione $V = \frac{m}{r} + \text{costante}$ onde $\mathbf{A} = \text{grad} \frac{m}{r}$.

Se poi si conviene, come si suole fare in molti casi, che la funzione del campo si annulli a distanza infinita, si omette la costante additiva.

?) Campo newtoniano di n masse agenti.

Per masse agenti $m_1, m_2 \dots m_n$ in un punto in cui le distanze da esse siano rispettivamente $r_1, r_2 \dots r_n$, la funzione del campo risultante degli n campi sarà:

$$V = \sum_s \frac{m_s}{r_s} + \text{costante} \quad \text{e il vettore risultante} \quad \mathbf{A} = \text{grad} V = \sum_1^n \frac{m_s}{r_s^2} \mathbf{r}_{ns}$$

$$\Phi = 4\pi \sum_1^n m_i \quad (\text{teorema di Gauss generalizzato}).$$

?) Distribuzione volumica.

In questo caso si passa a quello di una distribuzione continua di massa agente sostituendo alla sommatoria l'integrale. In realtà in seguito alle scoperte della fisica moderna si dovrebbe pensare che quest'ultimo caso abbia un interesse puramente matematico perché la materia, come l'elettricità, è costituita da particelle discrete, ma in effetto generalmente occorrono le formule integrali le quali s'intende abbiano un significato statistico, in quanto non si spinge l'analisi fino a calcolare l'effetto delle singole particelle. Perciò riportiamo queste formule anche per uniformarci al resto della trattazione in cui i casi di distribuzione puntiformi sono prospettati come casi limite di distribuzione continua allo svanire del volume.

Indichiamo con ρ e chiamiamo *densità* la massa per unità di volume dell'agente newtoniano: sarà $4\pi\rho = \text{div} \mathbf{A}$.

Ciò posto, nel caso di una distribuzione dell'agente considerata come continua entro un volume τ e le due espressioni del potenziale, per ρ

Digitare l'equazione qui e per $\text{div} \mathbf{A}$, omettendo la costante indeterminata: $V = \int \frac{\rho}{r} d\tau = \int \frac{\text{div} \mathbf{A}}{4\pi r} d\tau$

e naturalmente in tutto lo spazio (ora senza alcuna esclusione perché ρ è da per tutto finito) per il valore del vettore al solito $\mathbf{A} = \text{grad} V$ ².

Le differenze fra i diversi valori di r entro la regione τ sono tanto più piccole quanto più piccola è questa regione; cosicché al limite si avrà, per ciascun punto dello spazio circostante, un valore unico di r , e si ricadrà nel caso elementare considerato.

¹ Ricordiamo che in tale sistema si assumono due sole unità fondamentali, quella di lunghezza e di tempo e, come unità derivata, la massa che produce l'unità di accelerazione all'unità di distanza. Espressione dimensionale: $[M] = [L^3 T^{-2}]$.

² Non ci tratteniamo sopra la discussione analitica che mostra la piena ammissibilità di queste formule anche entro la regione di div : il lettore può trovarle in trattati sulla teoria del potenziale.

?) Distribuzione di strato – divergenza superficiale.

Se la regione di divergenza si appiattisce in modo che lo spessore divenga trascurabile, invece della densità volumica si considera la densità superficiale σ (massa per unità di area) e naturalmente la divergenza superficiale si pone $4\pi\sigma = \text{div}_a \mathbf{A}$ e si scrive $\mathbf{V} = \int_a \frac{\sigma}{r} \mathbf{da} = \int_a \frac{\text{div} \mathbf{A}}{4\pi r} \mathbf{da}$ $\mathbf{A} = \text{grad} V$ che valgono in tutto lo spazio esclusi i punti della superficie sulla quale si presenta una discontinuità sulla componente normale, onde:

$$A_n^+ - A_n^- = 4\pi\sigma = \text{div}_a \mathbf{A} \quad (\text{la carica è sulla superficie}).$$

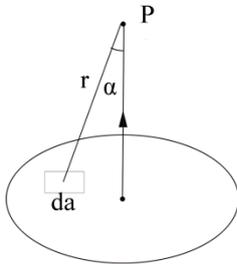
10 Queste formule valgono in generale per qualunque forma regolare della superficie sede della divergenza normale, ossia sostegno della distribuzione di strato.

A noi interessa in modo particolare il caso di uno strato in forma circolare con densità uniforme. L'asse del circolo sarà asse di simmetria del campo e sarà una linea di flusso; le altre linee saranno distribuite simmetricamente rispetto a questa retta e al piano del circolo. Tra di esse sono rettilinee soltanto quelle giacenti in questo piano le quali stanno diritte ai raggi del circolo.

Il flusso complessivo uscente da qualunque superficie che avvolge il circolo ha il valore $\phi = 4\pi a\sigma$ ($a\sigma$ agente newtoniano, $\sigma = m/a$) essendo a l'area totale del circolo.

20 Questo flusso tende a divenire uniformemente distribuito sopra una sfera col centro nel centro del circolo quando il raggio di questo tende all'infinito.

Ha uno speciale interesse il valore del campo in un punto P sull'asse del circolo: ogni elemento di area da vi porta un contributo $\frac{\sigma}{r^2} da \cos\alpha$ ove r è la distanza dell'elemento di area stesso dal punto P considerato e α l'angolo che tale raggio vettore fa con l'asse, onde



$$A = \sigma \int_a \frac{\cos\alpha}{r^2} da = \sigma \int d\omega$$

D'altra parte l'espressione sotto il segno di integrale dà il valore infinitesimo dell'angolo solido sotto cui dal punto di P si vede l'areola da , onde in definitiva $A = \sigma \Omega$ essendo Ω l'angolo solido da cui dal punto P si vede tutta l'area del circolo.

35 Queste espressioni valgono anche in segno quando si sia convenuta una direzione positiva sull'asse e alla quale corrispondano il segno di A e quello da attribuire all'angolo solido Ω secondo la banda da cui giace il punto P . Al limite, quando il punto si avvicina indefinitamente ad O da una parte o dall'altra, A tende ai valori

$$A_n^+ = 2\pi\sigma \quad A_n^- = -2\pi\sigma$$

a seconda della banda da cui il punto P proviene. E osserviamo che queste due espressioni si possono ottenere molto semplicemente da quella generale della divergenza superficiale tenendo conto che in questo caso, per ragioni di simmetria, deve essere

$$A^+ = A^- .$$

?) Campo newtoniano detto bipolo.

Speciale interesse ha il caso di due nuclei di divergenza quasi puntiformi di uguale valore assoluto e segni contrari $+m$ e $-m$ posti a piccola distanza l fra di loro. Un tale sistema si suole chiamare bipolo di momento ml . Indicando con r_1 e r_2 le rispettive distanze del punto potenziato P da m e da $-m$ avremo

$$5 \quad V = m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = m \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

che essendo l molto piccolo rispetto a r_1 e r_2 può scriversi, indicando con r la distanza del punto potenziato P dal punto di mezzo di l e con θ l'angolo formato da r con l

$$V = \frac{ml \cos \theta}{r^2}.$$

Il campo vettoriale \mathbf{A} , essendo $\mathbf{A} = \text{grad}V$, avrà in un punto generico oltre la
 10 componente radiale $A_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{2ml \cos \theta}{r^3}$ anche una componente trasversale, cioè secondo una direzione s perpendicolare a r ($ds = r d\theta$)

$$A_s = -\frac{dV}{ds} = \frac{ml \sin \theta}{r^3}$$

Entrambe le componenti, e quindi il modulo del vettore, per r che tende all' ∞ sono ora evanescenti di ordine 3^{-1} . Considerando il momento come vettore ($m\mathbf{l}$) potremo scrivere
 15 $V = \frac{[m\mathbf{l}] \cdot \mathbf{x} \mathbf{r}_n}{r^2}$.

Ma più interessante e ricca di conseguenze importanti è la trasformazione della precedente espressione che si fa immaginando una piccola area a perpendicolare al segmento l per il suo punto di mezzo con la pagina positiva rivolta a $+m$ e ponendo $m\mathbf{l} = \mathbf{P}a$ $\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{l}}{a}$.

20 Invero allora si scriverà $V = \frac{P a \cos \theta}{r^2} = \frac{\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{x} \mathbf{r}_u}{r^2} = P\omega$

ove ora ω è l'angolo solido (piccolo) sotto cui si vede l'area a dal punto potenziato assunto come positivo, se questo punto è posto dalla banda della pagina positiva, negativo, se dalla banda negativa.

25 ?) Campo newtoniano di doppio strato.

Immaginiamo ora infiniti bipoli schierati normalmente ad una superficie regolare in modo che tutti i nuclei $+$ siano da una parte e i negativi dall'altra banda. Consideriamo queste distribuzioni come due strati di densità $+\sigma$, $-\sigma$: per ogni areola da avremo un bipolo di momento $l\sigma da$ ponendo ora ($lm = l\sigma da$) $\mathbf{P} = l\sigma$, potremo
 30 scrivere due espressioni del potenziale di doppio strato

$$V = \int_a \frac{l\sigma \cos \theta}{r^2} da \quad V = \int_a P d\Omega \quad \left(\frac{\cos \theta}{r^2} da = d\Omega \right)$$

¹ È interessante in se, e forse più per una conseguenza della quale avremo poi a occuparci, confrontare l'ordine di grandezza su questo campo di bipolo e il precedentemente considerato campo con divergenza puntiforme, o, se si crede, con massa agente puntiforme. Per questo si ha $A_p = \frac{m}{r^2}$; per l'altro $A_b = \sqrt{A_r^2 + A_s^2} = \frac{\sqrt{m^2 l^2 \cos^2 \theta + m^2 l^2 \sin^2 \theta}}{r^3}$. Cioè $A_b = \frac{ml}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$ e infine $A_b \leq \frac{2ml}{r^3}$ onde $\frac{A_b}{A_p} \leq \frac{2l}{r}$ e siccome abbiamo supposto l piccolissimo rispetto a r , così, a parità di valore assoluto dell'unica e di ciascuna delle due masse agenti, il campo di bipolo risulta sempre evanescente rispetto a quello di massa unica. Il campo di bipolo non potrà essere considerato non evanescente se non si pensa che la massa m cresca e tenda a ∞ quando decresca e tenda a 0 in modo che ml non sia evanescente. (Nota scomparsa successivamente)

Nella seconda espressione (nella quale l'indice a serve solo a determinare l'estensione del campo d'integrazione) $d\Omega$ è l'angolo solido sotto cui dal punto potenziato si vede l'areola da assunta positiva se questa presenta la pagina $+$, negativa se la $-$, al punto potenziato. Un cono infinitesimo che avendo per vertice il punto potenziato incontra la superficie del doppio strato due o più volte, fornirà due o più elementi di integrazione alternativamente opposti di segno. Se ora facciamo l'ipotesi che P sia costante su tutta l'estensione del doppio strato (che allora dicesi uniforme o semplice e P dicesi potenza del doppio strato) avremo: $V = P \int_a d\Omega$

e, dalla precedente osservazione sui segni di integrazione, $\int_a d\Omega = \Omega$.

Osserviamo fin da ora che in valore assoluto questo Ω è uguale all'angolo solido sotto cui dal punto potenziato P si vede il vero contorno C che può essere o non essere il contorno apparente C' del doppio strato.

Esso poi risulta $+$ o $-$ a seconda del segno prevalente negli elementi areolari di interazione. Per es. se il doppio strato uniforme è disteso su tutta una superficie chiusa risulta per i punti esterni $\Omega = 0$; $V = 0$, e per i punti interni $\Omega = \pm 4\pi$; $V = \pm 4\pi P$ a seconda che la pagina positiva sia interna o esterna¹. Ne segue che il potenziale avrà un valore costante sia all'interno che all'esterno del doppio strato in tutto lo spazio (esclusa, ben si intende, la regione lamellare del doppio strato stesso); e tra lo spazio interno e l'esterno si presenterà una differenza di potenziale $V_i - V_e = \pm 4\pi P$ (se il segno sarà quello stesso della pagina interna).

Se la superficie non è chiusa, il valore del potenziale varierà con continuità in tutti i punti del campo, escluso sempre il doppio strato, avvicinandosi però a uno stesso punto di questo dalla banda positiva e dalla negativa, avremo due valori limiti notevolmente diversi per i quali varrà ancora $V^+ - V^- = 4\pi P$ che definisce il campo fuori del doppio strato.

Ciò risulta dalla seguente osservazione. Consideriamo due punti Q_1 e Q_2 molto vicini tra loro, l'uno dalla banda negativa, l'altro dalla positiva del doppio strato terminato al contorno C e immaginiamo per un momento il doppio strato esteso sempre con la stessa potenza P in modo da chiudere il contorno cosicché il punto Q_1 resti interno e Q_2 esterno al doppio strato così completato. Per il potenziale di Q_1 rispetto al doppio strato completato diamo anziché il valore 0 quello della costante arbitraria V_0 e ne otterremo quello rispetto al doppio strato primitivo sottraendo il valore competente alla parte aggiunta e risulta $V_1 = V_0 - P\Omega_1$ essendo Ω_1 l'angolo sotto cui si vede il contorno da Q_1 . Per il punto Q_2 analogamente avremo

$$V_2 = V_0 + P4\pi - P\Omega_2 \quad \text{onde} \quad V_2 - V_1 = P[4\pi - (\Omega_2 - \Omega_1)].$$

Ma $\Omega_2 - \Omega_1$ è evanescente quando Q_1 e Q_2 si avvicinano oltre ogni limite fa loro rimanendo separati dal doppio strato che ha spessore infinitesimo. Passando lungo un percorso che non traversi il doppio stato da Q_1 a Q_2 il potenziale varia con continuità e la variazione a meno di un infinitesimo è $4\pi P$.

¹ Si intende che tutti questi valori di V sono sempre definiti a meno di una costante additiva arbitraria.

Cionondimeno, la completa circuitazione comprendente il percorso diretto infinitesimo da Q_1 a Q_2 ha il valore 0, perché trattasi di un campo lamellare; nell'interno del doppio strato, il campo con orientazione normale al doppio strato dalla pagina positiva alla negativa, ha il valore $4\pi\sigma = 4\pi P/l$ che tende all'infinito allo svanire di l e fornisce alla circuitazione un termine appunto uguale a $-4\pi P$.

8) Osservazione.

Prendiamo ora a considerare in se stessa la ora ottenuta espressione del potenziale di doppio strato $V = P\Omega + \text{costante}$ la quale basta a definire il campo in tutti i punti dello spazio escluso il doppio strato stesso. È importante rilevare che in essa la superficie su cui il doppio strato è disteso non figura nella parte variabile che per il suo contorno. Se si considerano due doppi strati A e A' della stessa potenza P e terminanti allo stesso contorno, solo per i punti interni al volume compreso fra A e A' vi sarà una diversità nella costante additiva. La differenza tra i due valori sarà $4\pi P$ in più o in meno a seconda che si consideri il doppio strato A oppure A' ; siccome tale diversità nella costante additiva è indifferente per il gradiente, il campo vettoriale sarà nei due casi lo stesso, invero $\text{grad}V = P\text{grad}\Omega = P\text{grad}(\Omega \pm 4\pi)$; da questa considerazione risulta che ormai non ha più ragione di essere l'esclusione del campo della regione laminare occupata dal doppio strato, data la completa arbitrarietà di esso; resta da escludere soltanto una regione tubolare includente il contorno. La parte variabile del potenziale resta determinata solo dai due scalari P e Ω . Quanto al segno occorre precisare le convenzioni in modo che concordino con quelle fin qui adottate. Attribuiamo dunque un verso $+$ alla linea chiusa C , un segno $+$ o $-$ allo scalare P e assumiamo l'angolo solido negativo per i punti dai quali il verso positivo di C appare orario, positivo per i punti dai quali appare antiorario; se P è positivo, V ha lo stesso segno dell'angolo solido. Così a P positivo è associata l'idea di una circolazione nel verso positivo di C ; a P negativo quello di una circolazione nel verso opposto.

9) Potenziale polidromo

Queste considerazioni ci hanno portato gradualmente ad una trasformazione assai profonda; il campo di doppio strato da cui siamo partiti, considerato nella sua interezza cioè anche fra le due pagine del doppio strato stesso, era lamellare; il campo che ora consideriamo non è più tale. Le circuitazioni non concatenate con la linea C (che ora la determina insieme allo scalare P , sono ancora nulle, mentre quelle concatenate, per quanto abbiamo esposto, hanno il valore $4\pi P$ ovvero $-4\pi P$ a seconda del verso di esse rispetto al verso positivo di C . Ma si possono avere circuitazioni più volte concatenate. Cosicché la nuova funzione potenziale risulterà polidroma e scriveremo in generale $\mathcal{V} = P(\Omega + k4\pi)$ dove k è intero positivo o negativo o nullo. Beninteso che è indifferente ancora l'aggiunta di una costante.

Abbiamo modificato leggermente la notazione ponendo un \mathcal{V} corsivo in luogo del V stampatello per mettere maggiormente in rilievo la profonda diversità fra questa funzione potenziale polidroma e quelle monodrome finora considerate.

Invero si presenta ora un tipo del tutto nuovo di campi vettoriali, per ora nel caso più semplice, che si potrebbe anche dire in un certo senso caso elementare. La profonda differenza consiste in questo, che il campo ora considerato non presenta divergenza; perché si è ottenuto abolendo dal campo di doppio strato la regione laminare in cui in esso si presentavano i valori non nulli (positivi e negativi) della div. Non si tratta quindi di un campo newtoniano. D'altra parte è manifesto che non essendo nulle tutte le circuitazioni, il campo non è lamellare e presenta rotore e precisamente un rot lineare percorrente il contorno che insieme con il valore P lo determina. Ciò consiglia un altro cambiamento di notazione: e di qui in avanti sostituirò P con J cioè porremo $P = J/4\pi$ e $J/4\pi$ si potrà assumere come valore scalare del rot lineare. Infine scriveremo $\mathcal{V} = J(\Omega + k4\pi)$ e il valore delle circuitazioni semplicemente concatenate risulterà $\pm 4\pi J$.

Come la funzione potenziale monodroma $\mathcal{V} = M/r$ caratterizza il caso più semplice di campo newtoniano e da essa con un processo di derivazione si può ricavare nel caso generale la soluzione del problema *trovare il campo vettoriale lamellare quando sia data la distribuzione della div*, così la funzione potenziale polidroma $\mathcal{V} = J(\Omega + 4\pi n)$

caratterizza il caso più semplice di un'altra specie di campi vettoriali, quelli circuitali o anche vorticosi e può servire, mediante un processo di integrazione, a risolvere il problema di trovare un campo circuitale, quando sia data la distribuzione del rotazionale, cioè il campo del suo vettore rotazionale. In questo caso, come in quello, la solita condizione di evanescenza all'infinito rende il problema del tutto determinato.

Siamo così condotti a trattare di un nuovo caso di campi vettoriali che infine è sostanzialmente diverso da quello dei campi newtoniani e in certo modo ad esso complementare in quanto che, per i precedenti teoremi generali, ogni campo regolare evanescente all'infinito con ordine superiore a $3/2$ si può sempre considerare come il risultante di due campi appartenenti a due diversi tipi.

Ma perché la trattazione sia conforme a quelle precedenti dei campi newtoniani, mettendo per un momento da parte il caso particolare, prenderemo a trattare in generale dei

?) Campi circuitali¹.

In un campo circuitale $[A]$ è in ogni punto $\text{div}\mathbf{A} = 0$ $\text{rot}\mathbf{A} \neq 0$, invece è $\text{rot}\mathbf{A} = 0$ solo per i punti esterni ad una certa regione spaziale determinata. Siccome il campo $\text{rot}\mathbf{A}$ è di sua natura solenoidale, i suoi tubi di flusso, supponendo la data regione spaziale finita, saranno rientranti.

Ciò suggerisce di considerare dapprima una regione anulare o a ciambella, del resto di forma qualsiasi, al di fuori della quale sia $\text{rot}\mathbf{A} = 0$ ed internamente $\text{rot}\mathbf{A}$

¹ Osservazione (scomparsa successivamente). Quanto precede ha per oggetto il campo vettoriale e la funzione del potenziale V in conformità al caso fisico di questa trattazione; ma da un punto di vista puramente matematico è chiaro che già l'angolo solido in se stesso, ente puramente geometrico è qui considerato come funzione polidroma del punto a cui si riferisce; così il suo campo di variabilità divenendo illimitato, cioè da $-\infty$ a $+\infty$, tale funzione è liberata da qualsiasi superficie di discontinuità, e quindi, con la sola esclusione di una regione tubolare sottile comprendente l'anello, esso è in tutto lo spazio continuo regolare ed è in ogni punto senza eccezione definito il vettore come gradiente di tale funzione $\text{grad}\Omega$.

$\neq 0$ (potrà anche considerarsi il caso che sia sulla superficie $rot_a \mathbf{A} = 0$ che si presenterà come caso limite).

Il caso generale risulterà da una sovrapposizione di casi di questo genere dato che il rotazionale del campo risultante di più vettori non è che il vettore risultante dei rispettivi rotazionali.

Teniamo presente il teorema di Stokes $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_a rot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

dal quale discende immediatamente quanto segue:

1) Le circuitazioni lungo linee non concatenate allo spazio anulare come quella l_1 sono tutte nulle.

2) Le circuitazioni secondo linee concatenate semplicemente allo spazio anulare (come quella l_2) avranno tutte il valore Φ del flusso del vettore rotazionale il quale, essendo uguale traverso tutte le sezioni dell'anello, potrà dirsi *flusso circolante dentro l'anello*.

Le circuitazioni il cui percorso incontra l'anello in modo da rimanere in parte entro l'anello stesso come l_3 avranno un valore compreso fra zero e Φ_r ; e così quelle il cui percorso è tutto compreso nell'interno dello spazio anulare.

Ciò quanto al valore assoluto; quanto al segno, esso discenderà dalle fatte condizioni. Il nostro problema è dunque ricondotto alla ricerca della funzione potenziale V del campo $[\mathbf{A}]$.

Consideriamo lo spazio anulare scomposto in moltissimi sottili tubi di flusso del vettore $rot \mathbf{A}$ e poniamo per comodità $rot \mathbf{A} = 4\pi \mathbf{j}$ ed osserviamo che, essendo da una qualunque sezione di uno dei tubi, sarà in esso su tutta la lunghezza, costante il valore del flusso infinitesimo $d\Phi = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}$.

Consideriamo la funzione potenziale infinitesima dovuta a questo tubo infinitesimo $dV = (\Omega + n4\pi) \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}$ ove Ω è l'angolo solido sotto cui si vede l'anello sottile costituente il tubo di flusso dal punto potenziato e il corrispondente campo vettoriale $d\mathbf{A} = grad V$.

Per una circuitazione concatenata sarà $\oint d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}$.

Queste espressioni infinitesimali si integrano ora su tutta l'area a di una qualunque sezione dell'anello e si otterrà $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_a (\Omega + n4\pi) \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}$ che rappresenta la soluzione (riduzione) del nostro problema (al caso elementare).

Del resto queste ultime formule valgono anche se l'area rappresenta solo una parte di una sezione dell'anello, ed in tal caso ci danno il contributo al potenziale ed al campo recato dalla corrispondente sezione anulare.

Pensiamo ora che l'anello si vada assottigliando cioè che l'area a si riduca piccolissima mentre \mathbf{j} cresce in corrispondenza; potremo allora considerare, con tanta maggiore approssimazione quanto più l'anello è sottile, un unico valore Ω dell'angolo solido che può quindi essere portato fuori del segno d'integrale. Noi consideriamo così un rotazionale lineare \mathbf{J} vettore diretto come la tangente all'anello il cui valore scalare è dato da J .

Ponendo allora $\int_a \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = J$ (intensità dell'anello vorticoso)

otteniamo finalmente l'espressione del

?) Potenziale di un anello vorticoso sottile di intensità J .

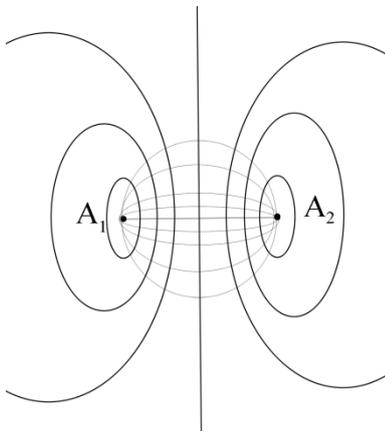
$$\mathcal{V} = J(\Omega + n4\pi)$$

la quale coincide con quella che abbiamo ottenuto partendo dal doppio strato con potenza P se è $P=J$.

5 È opportuno fare subito la seguente avvertenza: quest'ultimo risultato inteso come proposizione matematica ha importanza fondamentale per la nostra trattazione della elettrodinamica nella quale sarà però abbandonata la interpretazione fisica diretta che se ne suole fare nelle trattazioni tradizionali sotto il nome di *principio di equivalenza fra corrente elettrica e lamina magnetica semplice*.

10

2) Descrizione del campo di un anello vorticoso sottile.



Tale descrizione consiste nella rappresentazione della linea di flusso e delle linee equipotenziali. Essa avrà come fondamento lo studio della funzione Ω per il dato contorno e del campo vettoriale $(\text{grad}\Omega)$ enti puramente geometrici; poi basterà moltiplicare, caso per caso, i risultati per il valore dell'intensità J . Consideriamo, dunque, la parte geometrica del problema. In primo luogo è facile osservare che, in armonia con quanto è stato avvertito per il campo di un solo bipolo, il valore del potenziale (astrazione fatta per la polidromia, cioè $n = 0$) diviene infinitesimo di ordine non inferiore al secondo ed il gradiente di

ordine non inferiore al terzo. Conseguentemente il flusso traversante una qualsiasi porzione di una sfera con il raggio infinito e centro al finito è infinitesimo almeno del primo ordine. Ne viene di conseguenza che un tubo di flusso con sezione finita, e quindi percorso da un flusso finito, non può incontrare questa sfera che con una sua parte infinitesima e quindi *le linee di flusso di regola saranno rientranti*. In generale la loro forma effettiva è molto difficile a essere calcolata e descritta geometricamente.

25
30 Restringendosi però al caso che l'anello vorticoso giaccia in un piano è manifesto che questo debba essere piano di simmetria della figura geometrica del campo. In esso piano giaceranno due superfici equipotenziali l'una, costituita dalla regione interna all'anello (supposto per semplicità non intrecciato) cui competerà il valore assoluto dell'angolo solido 2π , l'altra, costituita dalla regione esterna dell'anello, cui competerà il valore dell'angolo solido 0 . Ciascuna linea di flusso dovrà incontrare normalmente l'una e l'altra regione, esse saranno dunque tutte (salvo la solita eccezione) ovali simmetriche rispetto a questo piano e concatenate all'anello.

35
40 Nel caso semplicissimo del circolo, l'asse di questo sarà asse di simmetria. Gli ovali saranno allora piani e giaceranno appunto in questi piani passanti per l'asse. L'unica linea di flusso eccezionale estendentesi all'infinito sarà l'asse stesso. La figura dà un'idea qualitativa della distribuzione delle linee di flusso sopra uno di questi piani forati nei due punti A_1 e A_2 .

Vi è segnata anche la traccia di alcune superfici equipotenziali le quali sono terminate all'anello stesso, ma questo deve essere escluso da ciascuna di queste essendo escluso dal campo.

È manifesto che l'intensità del campo tende all'infinito quando ci si accosta all'anello stesso. Questo dal punto di vista qualitativo.

Dal punto di vista quantitativo è manifesto che i calcoli possono essere eseguiti fondandosi sui valori dell'angolo solido per ogni punto dello spazio. Ma in linea generale il calcolo dell'angolo solido sotto cui da un punto dello spazio si vede un contorno dato è un problema assai difficile e complicato; né è problema semplice l'altro successivo di calcolare il gradiente. Noi ci limiteremo a trovare la soluzione per un punto dell'asse del circolo, caso dunque particolarissimo, ma assai importante per le applicazioni.

Indichiamo con R il raggio dell'anello circolare, con D la distanza OP del punto P (sull'asse) da O ; con r la distanza di P da ogni punto dell'anello, avremo $r^2 = R^2 + D^2$. Consideriamo la calotta sferica minore di un emisfero avente centro P e per contorno l'anello: l'angolo solido, vertice in P corrispondente a questa calotta, si ottiene dividendo la sua area per r^2 e, indicando con φ l'angolo formato dalla semiretta generica per P con la PO e con Φ quello formato da quelle di esse che incontrano l'anello, risulta

$$\Omega = 2\pi \int_0^\Phi \sin\varphi d\varphi = 2\pi (1 - \cos\varphi) \quad \text{dove} \quad \cos\varphi = \frac{D}{\sqrt{D^2+R^2}}$$

onde il valore assoluto
$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2+R^2}}\right)$$

Osserviamo che il vettore geometrico cercato sarà per ragioni di simmetria parallelo all'asse OP della figura; non resta dunque che da calcolare la derivata

$$\frac{d\Omega}{dD} = - \frac{2\pi R^2}{(D^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

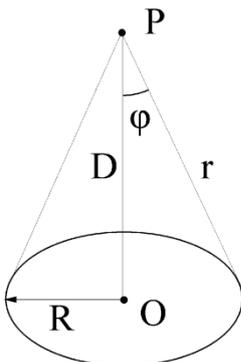
Il segno meno indica che l'angolo solido (Ω in valore assoluto) diminuisce col crescere di D . Quanto al segno da attribuire poi a Ω esso sarà determinato da un convenuto senso positivo sull'anello.

Al limite, per $D = 0$, risulta in valore assoluto

$$\left(\frac{d\Omega}{dD}\right)_0 = \frac{2\pi}{R}$$

Per punti fuori dell'asse il valore di Ω e quello del vettore risultano, per il contorno circolare, funzione di due sole variabili anziché di tre come in generale.

Ma il caso del contorno circolare ha speciale importanza: per questo riproduciamo la tavola numerica contenuta in una nota calcolata a Napoli. Da questa tabella è possibile con calcoli concettualmente non difficili ricavare l'orientazione e la grandezza del vettore grad, tenendo conto del raggio dell'anello d e dell'intensità j . (per avere il campo basta moltiplicare per j)



grad, tenendo conto del raggio dell'anello d e dell'intensità j . (per avere il campo basta moltiplicare per j)

$$j \frac{d\Omega}{dD} = j \frac{2\pi}{R} \quad j \Omega = V \quad - \frac{dV}{dn} = A$$

$$j \text{grad}\Omega = j \frac{2\pi}{R} = A$$

3) Legge elementare di Laplace¹.

¹19-1827, matematico, fisico, astronomo francese.

Mentre il problema della descrizione completa del campo, dato che l'intensità è la figura geometrica dell'anello vorticoso sottile, è assai complicato e di risoluzione tanto è più difficile quanto meno semplice è la figura; è invece assai semplice giungere alla una espressione di una legge assai semplice cui soddisfa il vettore del campo. A tal fine consideriamo uno spostamento infinitesimo ds' del punto potenziato P : ad esso corrisponderà per il potenziale l'incremento infinitesimo $dV = -\mathbf{A} \cdot ds' = J d\Omega$ ma $d\Omega$ si calcola facilmente ammettendo che invece di imprimere lo spostamento ds' al punto potenziato s'imprime lo spostamento $-ds'$ a tutti i punti dell'anello vorticoso sottile (v. fig.) ed osservando che il parallelogrammo infinitesimo con lati ds e $-ds'$ è visto dal punto P sotto l'angolo solido

$$d\Omega = \int_S \frac{(-ds' \wedge ds) \cdot \mathbf{r}_n}{r^2}$$

che per la nota proprietà del prodotto misto si può invece scrivere

$$d\Omega = \int \frac{ds \wedge \mathbf{r}_n \cdot (-ds')}{r^2}$$

ed essendo ds' costante in tutto il percorso di integrazione

$$d\Omega = -ds' \cdot \int \frac{ds \wedge \mathbf{r}_n}{r^2}$$

che vale anche in segno secondo le adottate convenzioni, onde

$$-\mathbf{A} \cdot ds' = -ds' \cdot \int \frac{J ds \wedge \mathbf{r}_n}{r^2} \quad \text{che deve valere}$$

qualunque sia il valore di ds' ;

$$\text{dunque sarà} \quad \mathbf{A} = \int \frac{J ds \wedge \mathbf{r}_n}{r^2} .$$

Possiamo dunque considerare il vettore \mathbf{A} come la risultante di infiniti vettori infinitesimi di cui ciascuno corrisponde ad un elemento ds dell'anello vorticoso sottile secondo la legge elementare

$$d\mathbf{A} = J \frac{ds \wedge \mathbf{r}_n}{r^2}$$

detta legge di Laplace perché da lui divinata per il capo elettromagnetico.

Se si considera invece di un anello vorticoso sottile una regione vorticoso estesa, pensando questa suddivisa in tubi infinitesimi di flusso del vettore \mathbf{j} la legge si scriverà

$$d\mathbf{A} = \frac{\mathbf{j} \wedge \mathbf{r}_n}{r^2} d\tau$$

onde per il vettore l'espressione integrale

$$\mathbf{A} = \int_{\tau} \frac{\mathbf{j} \wedge \mathbf{r}_n}{r^2} d\tau .$$

È chiaro che la legge elementare di Laplace ha per i campi circuitali funzione analoga a quella di Newton per quelli newtoniani, perciò i campi circuitali si chiamano anche campi laplaciani.

C'è però una profonda differenza: la legge di Newton rappresenta un caso particolare semplice pienamente ammissibile, quello cioè in cui solo nel piccolo volume la divergenza sia $\neq 0$, e magari molto grande, il caso cioè già considerato con div quasi puntiforme. Invece la legge elementare di Laplace prende il suo significato dall'integrazione perché un segmento aperto di anello vorticoso sottile o di un tubo di flusso

del vettore \mathbf{j} non può esistere a sé: ciò sarebbe in contraddizione con la proprietà del vettore rotazionale di formare un campo solenoidale.

(conclusione del teorema di unicità)

5 4) Scomponibilità di un campo in due: uno newtoniano e uno laplaciano.

In conclusione di quanto precede, tenendo conto in particolare la proprietà additiva della div e del rot nella composizione di campi vettoriali e il teorema di unicità, si conclude

10 *dato un campo vettoriale $[\mathbf{A}]$, regolare e evanescente a distanza infinita di ordine superiore a $3/2$, esso si può in ogni caso e in un solo modo considerare come il risultante di due, uno newtoniano e uno laplaciano, uno dei quali può eventualmente risultare nullo.*

Infatti potremo sempre porre: $\text{div}\mathbf{A} = 4\pi\rho$ $\text{rot}\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j}$
 e si potranno sempre calcolare i valori di ρ e di \mathbf{j} per ogni punto del campo. Dai
 15 valori di ρ la legge elementare di Newton permette di calcolare un campo $[\mathbf{A}']$ tale
 che sia $\text{div}\mathbf{A}' = 4\pi\rho$ $\text{rot}\mathbf{A}' = 0$; dai valori si potrà calcolare mediante la legge
 di Laplace un campo $[\mathbf{A}'']$ tale che sia $\text{div}\mathbf{A}'' = 0$ $\text{rot}\mathbf{A}'' = 4\pi\mathbf{j}$
 e risulterà $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}'] + [\mathbf{A}'']$.

Facciamo un'osservazione che ci interesserà in seguito. Possono essere assunti
 20 come dati del problema reciproco del precedente i valori di ρ e quelli di \mathbf{j} , i primi
 senza alcuna condizione speciale, i secondi con la condizione che il campo vettoriale
 $[\mathbf{j}]$ sia solenoidale; come incogniti i valori del vettore \mathbf{A} nei vari punti del campo. Il
 problema ammetterà sempre soluzione e se si impone per il campo $[\mathbf{A}]$ la solita con-
 25 dizione di evanescenza a distanza infinita, la soluzione sarà unica. Infine potremo an-
 che dire: l'analisi dei campi vettoriali regolari evanescenti a distanza infinita con or-
 dine superiore a $3/2$ si può sempre ricondurre a due sole leggi elementari: la newto-
 niana e la laplaciana.

L'esistenza stessa del campo è condizionata da quella della div e del rot, anzi que-
 sti enti e più propriamente lo scalare ρ e il vettore \mathbf{j} sono in stretta relazione con le
 30 cause fisiche che producono i fenomeni fisici la cui rappresentazione si fa mediante i
 campi vettoriali.

Storicamente lo studio matematico s'inizia dalle leggi elementari, più moderna-
 mente si è preferito iniziarlo dalla considerazione dei campi vettoriali. Tutto ciò vale
 anche nel caso che siano presenti superfici di discontinuità, nel qual caso, oltre alla
 35 divergenza volumica e del comune rot, è necessario considerare div e rot superfi-
 ciali.

15) L'operatore ∇^2 applicato ad un vettore.

Chiudiamo ciò che riguarda i campi vettoriali con la definizione di un altro opera-
 40 tore importante e un cenno di dimostrazione di due identità occorrenti per la nostra
 trattazione.

Dato un campo vettoriale $[\mathbf{A}]$ si suole indicare con $\nabla^2\mathbf{A}$ un vettore le cui com-
 ponenti cartesiane in ciascun punto sono i parametri differenziali secondo le rispettive
 componenti del vettore $[\mathbf{A}]$ pensato come funzione delle coordinate.

Avremo dunque per le componenti del vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$ le operazioni:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

Da questa definizione segue la seguente identità che trasforma il rot del vettore rot di un dato vettore

$$5 \quad \text{rot}^2 \mathbf{A} = \text{rot rot} \mathbf{A} = \text{grad div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Essa si verifica facilmente servendosi delle espressioni cartesiane sopra riportate.

Con lo stesso metodo si può verificare

$$\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A} = - \text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) .$$

10 16) Tre diversi ordini di grandezza.

In molti problemi di fisica classica in cui si prescinde dalla struttura atomica e molecolare dei corpi e granulare delle cariche elettriche, si considerano due ordini di grandezze: le grandezze finite che sono direttamente osservabili con i nostri strumenti e l'ordine degli infinitesimi matematici, cioè grandezze evanescenti, ossia variabili tendenti a 0.

Così per esempio si considera un insieme continuo di corpi di volume sempre più piccolo cioè tendente a 0 senza preoccuparsi che ciò non è conciliabile a tutto rigore col fatto (ormai si può usare questa parola) che tutti i corpi sono aggruppati discreti di atomi.

20 Così si considerano cariche elettriche infinitesime, mentre sappiamo essere le unità elementari di carica $4,77 \cdot 10^{-10}$ u.e.s. (C.G.S.), numero piccolo, ma non infinitesimo, non fosse altro perché costante. La grandezza infinitesima, e se si vuole anche il vettore infinitesimo, non si può dunque pensare che come tale, riducibile mentalmente così piccola da essere inapprezzabile nell'ordine di grandezza comune che dicesi

25 finito, e d'altra parte che resti sempre abbastanza grande in confronto all'ordine di grandezza atomico o elettronico, o diremo in generale dell'ordine di grandezza che si possano considerare continue le sue variazioni.

30 Nella presente trattazione, la quale non dimentica i concetti atomici o elettronici, ma non ne fa oggetto proprio, si considerano tre ordini di grandezze, intendendo che ciascuna sia inapprezzabile rispetto all'ordine di grandezza immediatamente superiore:

- 1) ordine di grandezza (vettori) finito ovvero comune ordine di grandezza;
- 2) ordine degli infinitesimi virtuali matematici;
- 3) ordine molecolare atomico ed elettronico.

PARTE TERZA

LA CORRENTE ELETTRICA

5

La corrente elettrica consiste in un movimento di cariche elettriche, movimento simultaneo di un grandissimo numero di cariche elettriche elementari il quale, anche se disordinato, presenta un prevalente orientamento statistico in relazione ai segni delle cariche. Consideriamo tre tipi di corrente:

- 10 di proiezione: movimento in uno spazio vuoto;
 di migrazione: corrente elettrica in corpi conduttori;
 di spostamento: corrente elettrica in corpi isolanti.

?) Concetto di corrente elettrica.

15 Il concetto primitivo di corrente elettrica è cambiato: si ha un movimento di numerose cariche positive e negative. In un primo tempo si aveva solo *elettrone* (-) e *protone* (+) con cariche uguali ma la massa del secondo è 1840 volte maggiore di quella dell'elettrone.

In seguito si è avuto anche:

- 20 *elettrone positivo* (+), |carica| e massa uguale a quella dell'elettrone;
elettrone pesante (-), carica uguale a quella dell'elettrone e massa 200 volte maggiore
neutrone: privo di carica e massa \cong protone;

25 ?) Vari tipi di correnti elettriche.

Moti liberi di cariche elementari:

a) negative:

correnti fotoelettriche: (elettroni nel vuoto) liberati dai corpi per effetto di radiazioni di sufficiente frequenza ($h\nu \uparrow$);

30 *correnti termoelettriche*: elettroni messi in moto dai corpi ad alta temperatura e muovendosi nel vuoto;

raggi catodici: elettroni partenti dal catodo di un tubo a gas molto rarefatto il cui cammino è da questo poco turbato;

raggi β : elettroni emessi da sostanze radioattive con velocità così grande che il loro moto è poco turbato anche quando avviene in seno a un gas relativamente denso;

35 b) positive:

singole, doppie, etc. associate a masse dell'ordine di grandezza atomica.

raggi α : comuni nuclei di elio emessi da sostanze radioattive;

40 *raggi canale o raggi anodici*: atomi, molecole e aggregati atomici vari secondo i casi, insomma ioni + in rapido moto nei gas rarefatti.

Dal vuoto passando a densità maggiori cambiano gli aspetti (più complicati, ma sempre si ha moto di joni ed elettroni). Dalla proiezione si passa alla migrazione: si chiamano sempre *correnti di conduzione*.

Il primo caso spiegato è quello degli elettroliti. Il caso di migrazioni di joni che per primo è stato oggetto di cognizioni chiare e precise, è quello che si presenta negli elettroliti. Invero è quello nel quale già da molto tempo, collegando i fatti chimici con quelli elettrici, si è giunti a precisare il concetto di carica costante dell'equivalente chimico e a determinare il valore della carica del grammo equivalente che, diviso per il numero di Avogadro, dà il valore della carica elementare.

Per la corrente elettrica nei corpi conduttori metallici, la spiegazione ha un carattere ipotetico. I fenomeni fotoelettrico e termoelettrico ci hanno suggerito di stimare che in parte preponderante la corrente è una migrazione di elettroni numerosissimi e mobilissimi entro la massa del metallo e la esistenza di questa specie di gas elettronico serve bene a rendere ragione della notevolissima conduttività termica di tali corpi.

?) Intensità della corrente elettrica.

È definita l'intensità della corrente misurabile dal complesso della cariche migrate: (intensità = rapporto fra le cariche e il tempo)

$$i = \frac{Q}{t} \quad \text{con } Q \text{ carica passata al tempo } T \text{ ovvero in generale} \quad i = \frac{dQ}{dt} .$$

Le unità sono il *Coulomb* definito per la via elettrostatica o elettrolitica e così pure lo *Ampère* internazionale. Il galvanometro si può avere del tipo statico per la misura di correnti permanenti, sia balistico per correnti di breve durata. La misura del galvanometro costituisce una misura elettromagnetica della corrente e tanto meno un riferimento all'unità assoluta elettromagnetica di corrente o di carica (Ampère teorico o Coulomb teorico).

La carica Q sarà uguale alla somma algebrica delle innumerevoli cariche elementari positive e negative che ad esso derivano meno quelle delle cariche elementari che da esso partono.

D'altra parte le svariate forme di corrente si possono senza eccezione, cambiare l'una nell'altra, per le diverse parti di un circuito e se non si formano lungo il percorso accumulamenti di cariche dell'uno dell'altro segno, l'intensità delle diverse forme di corrente sarà la stessa in tutte le parti.

Per ora il funzionamento del galvanometro è un'incognita che risolveremo nel nostro corso e la soluzione consiste nell'interpretazione elettromagnetica del magnetismo.¹

Ma abbiamo ancora da parlare di un'altra specie di correnti, quella che si può avere nei corpi isolanti.

¹ Le trattazioni usuali danno solo un nome all'incognita, quello di magnetismo, senza spiegare in che cosa consista perché in esse la equivalenza fra magneti e correnti non ha significato concettuale di riduzione di quelli a questo. In altre parole la concordanza fra misura elettrostatica dell'elettricità e misura elettrolitica trova una facile spiegazione nell'esistenza della cariche elementari. L'equivalenza delle misure elettrostatiche ed elettrolitiche con quelle elettromagnetiche è problema di altra natura. Assicurata ora empiricamente la proporzionalità degli effetti osservabili, l'interpretazione ne sarà data appunto attraverso le leggi dell'elettrodinamica nelle quali rientra l'elettromagnetismo. Essa implica il confronto delle interazioni fra cariche elettriche in moto e pone il risultato di tale confronto in relazione con la propagazione delle onde sbocando nella teoria della relatività. (nota scomparsa successivamente).

?) Corrente elettrica nei corpi isolanti.

Sembra un paradosso: esaminiamo accuratamente. Consideriamo un circuito troncato da un condensatore di capacità C . È noto che se si inserisce una f. e. motrice E esso sarà percorso momentaneamente da una corrente che sboccherà sulle armature nella formazione di due cariche $+Q$ e $-Q$ e si arresterà quando la d.d.p. fra le armature $\frac{Q}{C}$ avrà raggiunto il valore uguale ed opposto ad E (non ci occupiamo se ci si pervenga dopo un gruppo di oscillazioni). Poniamoci il problema se veramente la corrente si arresta al limite del condensatore, come ordinariamente si pensava, o parzialmente si prolunga e si chiude attraverso il condensatore. Per risolvere il problema occorre anzitutto esaminare il problema seguente.

?) Induttività elettrica e spostamento elettrico.

È noto d'altra parte che il valore di E dipende oltre che dalle dimensioni del condensatore anche dalla natura dell'isolante che occupa lo spazio compreso fra le armature e precisamente che $C = \epsilon_p C_0$ ove C_0 è la capacità quando lo spazio sia vuoto, ϵ_p un coefficiente specifico del materiale isolante (l'indice p è stato posto per indicare che si tratta di un numero puro), è molto importante il fatto che per qualunque sostanza è: $\epsilon_p > 1$.

Corrispondentemente per le cariche abbiamo $Q = \epsilon_p Q_0$ essendo Q_0 il valore nel caso del condensatore nel vuoto.

Interpretiamo con considerazioni realistiche e plausibili: molte esperienze mostrano che ogni corpo contiene cariche elettriche. Se un corpo isolante è neutro esso contiene un numero uguale di cariche $+$ e $-$ in ogni elemento di ordine di grandezza non piccolo, ma grande rispetto a quello atomico.

Ogni corpo neutro ha delle cariche in equilibrio statico; se è un conduttore, quando viene posto in un campo le cariche migrano, se è isolante, avviene uno spostamento relativo delle cariche dei 2 segni che si arresterà tosto ad un valore entro certi limiti proporzionale all'intensità del campo, cosicché le sezioni trasversali di uno steso tubo di forza saranno attraversate da cariche elementari $+$ in un verso e $-$ nel verso opposto e tali cariche risulteranno uguali per tutte le sezioni di uno stesso tubo di forza cosicché ogni porzione apprezzabile del corpo resterà neutra. Invece in immediata vicinanza della superficie del corpo si avranno eccessi di cariche elettriche non neutralizzate $+$ ove le linee di flusso del campo escono dal corpo, $-$ ove entrano. Tali eccessi risulteranno in ogni caso *minori* di quelli che si avrebbero a parità di campo esterno per un conduttore, perché non bastano ad annullare il campo interno. Il loro valore è manifestamente in relazione oltre che col campo, anche con la costante ϵ_p della sostanza isolante. Il corpo si dice così *polarizzato*. Determiniamo la carica totale che si presenta in faccia a ciascuna delle armature. Sia V la d.d.p. che, essendo uguale alla f.e.m. inserita nel circuito, è la stessa sia che fra le armature ci sia il vuoto oppure l'isolante.

$$V = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q}{\epsilon_p C_0} \quad (\text{perché } Q = Q_0 \epsilon_p) \quad \text{onde} \quad Q = Q_0 + Q_0(\epsilon_p - 1).$$

Dunque nel secondo caso sulle armature si hanno in più che nel primo le due cariche

$$+ Q_0(\epsilon_p - 1) \qquad - Q_0(\epsilon_p - 1)$$

il cui campo dovrà essere neutralizzato appunto dalle cariche portate sulle armature dagli spostamenti elettrici nell'isolante e quali saranno dunque rispettivamente

$$5 \quad \begin{array}{ll} - Q_0(\epsilon_p - 1) & + Q_0(\epsilon_p - 1) \quad \text{ovvero} \\ - Q \frac{(\epsilon-1)}{\epsilon_p} & + Q \frac{(\epsilon-1)}{\epsilon_p} \end{array} .$$

Infine il campo tra le due armature è quello stesso che sarebbe prodotto nel vuoto da due distribuzioni di strato con le cariche

$$\left(Q - Q \frac{(\epsilon-1)}{\epsilon} \right) \qquad - \left(Q - Q \frac{(\epsilon-1)}{\epsilon} \right) .$$

10 A tutto rigore si dovrebbe a questo campo aggiungere quello dei due doppi strati che si formano alle due superfici di separazione tra isolante e conduttore, ma da quanto si è detto al § è manifesto che, essendo estremamente piccolo lo spessore di tali doppi strati, è trascurabile la loro potenza e quindi la differenza di potenziale che possono produrre tra le armature.

15 Ciò dato, indicando con i l'intensità della corrente nel filo conduttore durante il processo della carica del condensatore, si ha

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_0}{dt} + \frac{d}{dt} Q_0(\epsilon_p - 1) \quad \text{dove l'ultimo termine è la misura della } \textit{corrente}$$

di spostamento reale nell'isolante reale che corrisponde al vero moto di cariche elettriche; il $\frac{d}{dt} Q_0$ non corrisponde ad un moto di cariche e resta solo nel vuoto perché

20 qui non vi sono cariche spostabili. Una parte dunque della corrente di carica, anzi tutta se tra le armature del condensatore lo spazio è vuoto, rimane aperta. Invece per Maxwell l'ipotetica corrente di spostamento comprende i due termini e non si annulla nel vuoto, conservando sempre il valore i e permette di considerare la corrente di carica come sempre e totalmente chiusa (analogamente per la scarica).

25 La diversità è profonda perché per Maxwell l'ipotetica corrente di spostamento è capace di produrre gli stessi effetti elettrodinamici come una corrente di conduzione di pari intensità e così è giustificata l'inclusione del $\frac{dQ_0}{dt}$ nel calcolo di tali effetti; questo è di fondamentale importanza di quella teoria la quale sbocca nella previsione di onde propagantesi anche nel vuoto: questa è la grande scoperta teorica di Maxwell, confermata dall'esperienza, e vedremo che ciò può bastare (indirizzo sperimentale-matematico galileiano). A questa sostituiremo una considerazione matematica che sarà equivalente negli effetti.

35 Intanto vediamo come la corrente di spostamento reale è distribuita nell'interno del corpo isolante, cioè in quale relazione col campo di forza elettrica $[\mathbf{E}]$ sta la sua densità considerata come un vettore, la cui orientazione (almeno fino a che ci limitiamo a considerare materiali isolanti isotropici) risulta la stessa di quella del campo elettrico crescente nel tempo, l'opposta di quella del campo elettrico decrescente nel tempo.

Per quanto abbiamo già detto questo vettore seguirà prontamente le variazioni del campo, e, se queste non sono troppo rapide, potremo ritenerlo concorde e proporzionale in ogni punto e ad ogni istante a $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$. Il campo $[\mathbf{E}]$ avrà nell'interno del volume del corpo isolante supposto omogeneo (omogeneità statistica) $\text{div}=0$ e solo presenterà alla superficie di esso una divergenza superficiale proporzionale alla densità superficiale della carica elettrica sulle armature. Noi ammetteremo dunque per ora che le variazioni nel tempo delle cariche e del campo siano abbastanza lente perché valgano istante per istante le leggi della elettrostatica. Nel caso di variazioni molto rapide, quello che stiamo ora dicendo non è più valido, come vedremo a suo tempo.

Il problema è così posto in questi termini: scritta per il vettore densità della corrente di spostamento l'espressione $x\frac{d\mathbf{E}}{dt}$, determiniamo il valore della costante x .

La soluzione non presenta, come vedremo, alcuna seria difficoltà. Ma a fine di ottenere una maggiore generalità e chiarezza concettuale e una migliore uniformità di metodo con ciò che a suo tempo sarà esposto riguardo al campo magnetico, è ora opportuno riformare il sistema di misura delle grandezze elettriche e rivedere in connessione con ciò almeno alcuni concetti di elettrostatica.

?) Sistema di misura a 4 unità fondamentali.

Ricordando che la ϵ_p compare anche nella legge di Coulomb al denominatore e che se questa legge è espressa con un altro sistema di misura, ϵ_p non è più puramente numerica, useremo col sistema Giorgi quattro unità di misura, una di lunghezza, una di massa, una di tempo, e una elettrica. Per unità elettrica prenderemo la carica elettrica. Le espressioni dimensionali saranno del tipo $[L^\alpha][M^\beta][T^\gamma][Q^\delta]$, quella di intensità di corrente sarà $[J] = [QT^{-1}]$, densità di corrente $[i] = [L^{-2}QT^{-1}]$, densità volumica di carica $[\rho] = [L^{-3}Q]$, densità superficiale di carica $[\sigma] = [L^{-2}Q]$.

Per il modulo del vettore *forza elettrica* \mathbf{E} , definito come valore della forza agente su una carica diviso per il valore di questa: $[\mathbf{E}] = [LMT^{-2}Q^{-1}]$, onde per il potenziale elettrico, essendo $\mathbf{E} = \text{grad}V$ (campo conservativo), $[V] = [L^2MT^{-2}Q^{-1}]$ e infatti per QV risultano le dimensioni di un lavoro concordemente alla definizione magnetica del potenziale.

?) I vettori e gli scalari nel campo elettrico.

Nella legge di Coulomb $F = \epsilon^{-1} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ il coefficiente ϵ^{-1} non è un numero puro come, con danno della chiarezza, si pone nel sistema elettrostatico e tanto meno ha le illusorie dimensioni $[L^{-2}T^{-2}]$ come nell'elettromagnetico, ma è la misura di una grandezza fisica nel sistema Giorgi dalle dimensioni

$$[\epsilon^{-1}] = [L^3MT^{-2}Q^{-2}]$$

La misura di questa grandezza e di ϵ reciproco dipende dalle unità fondamentali e ancora dal mezzo ambiente e tali due dipendenze hanno carattere profondamente diverso. Perciò scindiamo tale misura in due fattori scrivendo $\epsilon = \epsilon_p \epsilon_0$ ove ϵ_0 è il valore di ϵ nel vuoto, $\epsilon_0 = 1,11 \cdot 10^{-10} [\text{coulomb}^2 \text{sec}^2 \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1}]$

dunque ε_0^{-1} è una costante fisica come il k della legge di Newton $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$ le cui dimensioni sono $[k] = [L^3 M T^{-2} M^{-2}]$ scritta in modo da distinguere le due funzioni della massa come inerte e come massa gravitante, per meglio mostrare la corrispondenza con l'espressione dimensionale di ε^{-1} ; ε_p risulta numero puro coincidente con quello che esprime la *induttività elettrica* nel sistema elettrostatico, quello in effetto il cui valore è registrato in tutte le tabelle fisiche, esso coincide con lo ε_p già usato in quello che precede (perché la posizione $\varepsilon_0 = 1$ è fondamentale nel sistema elettrostatico).

Quando si voglia estendere (il che noi non facciamo) ai dielettrici anisotropi, al posto del numero ε_p si considera un'omografia vettoriale. Quest'ultimo concetto manifestamente si potrebbe giustificare con l'ipotesi di un etere similcorporeo che noi escludiamo, non senza buone ragioni.

In certi trattati è posto $\varepsilon = \text{induttività assoluta}$, $\varepsilon_p = \text{induttività relativa}$ oppure potere induttore specifico del mezzo materiale; conseguentemente ε_0 è considerato come *induttività assoluta del vuoto*.

Chiamiamo ε_0^{-1} *costante universale elettrostatica*.

L'intensità del campo elettrico prodotto da una carica Q distribuita in simmetria sferica intorno ad un centro alla distanza r da questo, è data nel vuoto da:

$$E_0 = \varepsilon_0^{-1} \frac{Q}{r^2} \quad \text{e nel mezzo di induttività } \varepsilon_p \quad E = \varepsilon_p^{-1} \varepsilon_0^{-1} \frac{Q}{r^2} \quad \text{con } \varepsilon_p < 1$$

e risulta sempre $E < E_0$.

Sappiamo che ciò avviene perché allo stabilirsi del campo le correnti di spostamento nell'isolante hanno portato intorno alla carica Q una carica $-Q^*$ che neutralizza in parte l'effetto, cioè una carica tale che risulti $Q - Q^* = \varepsilon_p^{-1} Q$ onde

$$-Q^* = -Q(1 - \varepsilon_p^{-1}) = -Q \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p}.$$

L'immissione nel mezzo isolante della carica equivale quindi a sottrarre da essa una sua parte uguale a $Q \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p}$.

Ora vogliamo determinare il valore Q' della carica che deve essere aggiunta a Q per produrre, nel mezzo di induttanza (-ività) ε_p , un campo di forza elettrica uguale a quello che Q produce nel vuoto. Dovrà essere soddisfatta l'equazione

$$\varepsilon_p^{-1} \varepsilon_0^{-1} \frac{Q+Q'}{r^2} = \varepsilon_0^{-1} \frac{Q}{r^2} \quad \text{onde}$$

$$Q' = Q(\varepsilon_p - 1)$$

il quale risultato è in perfetto accordo con quanto precede.

In corrispondenza all'introduzione del fattore ε_0^{-1} nella formula di Coulomb, anche l'espressione del teorema di Coulomb $E_n = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$ (intensità del campo in un punto vicinissimo alla superficie di un conduttore) risulta analogamente modificata, cosicché si scrive

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon_p \frac{E}{4\pi} \quad \sigma_0 = \varepsilon_0 \frac{E}{4\pi}$$

onde, derivando rispetto al tempo, $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{(\epsilon_0 \epsilon_p \mathbf{E})}{4\pi}$ che esprime la densità di corrente ideale che nell'isolante prolungherebbe la corrente che scorre nel conduttore, cioè l'ideale corrente di spostamento di Maxwell, e se ϵ_p è costante nel tempo, si scriverà

$$5 \quad \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \epsilon_p \mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \epsilon_0 (\epsilon_p - 1) \mathbf{E}$$

in cui solo l'ultimo termine si riferisce allo spostamento di reali cariche elettriche entro il corpo isolante, cioè misura scalarmente la densità della corrente di spostamento reale. E il vettore densità della corrente di spostamento reale sarà

$$i_r = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_p - 1)}{4\pi} \frac{d\mathbf{E}}{dt},$$

10 mentre per il vettore densità della ipotetica corrente di spostamento secondo Maxwell si avrebbe $i_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon_p}{4\pi} \frac{d\mathbf{E}}{dt}$.

L'adozione del nuovo sistema a 4 unità toglie l'apparente omogeneità fra densità superficiale e intensità del campo, tra rapidità di variazione di questo e densità di corrente che oscurava il significato fisico delle formule nel sistema C.G.S..

15 Questa relazione vale in qualunque campo elettrico, comunque siano distribuite le cariche che lo producono.

Tornando al caso semplice della carica con simmetria sferica, mostriamo l'utilità della introduzione di un terzo vettore. Finora abbiamo distinto il vettore \mathbf{E} da quello \mathbf{E}_0 , e quindi fra loro i due campi vettoriali $[\mathbf{E}]$ e $[\mathbf{E}_0]$. Il primo è il campo di forza elettrica quale si esplora per mezzo dell'induttività; il secondo è il campo di forza elettrica quale si esplorerebbe se la stessa carica produttrice si trovasse in uno spazio vuoto.

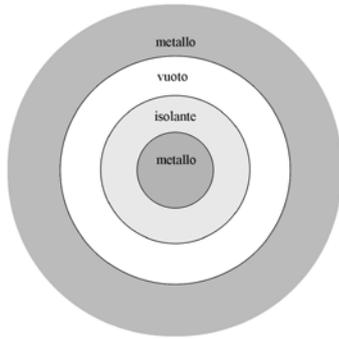
Quando due campi si vogliono calcolare dalla carica produttrice Q , bisogna tener conto per \mathbf{E}_0 della costante ϵ_0 e poi per passare ad \mathbf{E} anche della costante ϵ_p .

25 Il calcolo dunque si fa in tre tappe

$$\frac{Q}{r^2}; \quad \frac{Q}{r^2} \epsilon_0^{-1}; \quad \frac{Q}{r^2} \epsilon_0^{-1} \epsilon_p^{-1};$$

delle quali la prima ci dà il valore del modulo di un vettore la cui orientazione è quella stessa di \mathbf{E}_0 . È quindi naturale considerare anche questo vettore in sé il quale però non risulta direttamente da un rilievo del suo campo fatto da una carica esploratrice, ma da un calcolo avente per dato solo gli elementi geometrici ed il valore della carica produttrice: le sue dimensioni risultano $[\mathbf{D}] = [QL^{-2}]$. Indichiamo tale vettore con \mathbf{D} per seguire una notazione assai in uso.

Veramente quelli che seguono la razionalizzazione delle formule, indicano con \mathbf{D} un vettore il cui modulo è dato da $\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}$, cioè tale che il suo flusso attraverso una superficie chiusa contenente nell'interno la carica Q risulti uguale alla carica stessa e ciò porta a far coincidere la sua derivata rispetto al tempo con l'ipotetica corrente elettrica di spostamento secondo Maxwell. Perciò si chiama $\mathbf{D} = \text{spostamento elettrico}$. La diversità fra questo vettore e il nostro \mathbf{D} è puramente numerica. Noi lo chiameremo solo \mathbf{D} .



Chiariamo ancora con un esempio di simmetria sferica. Di tre sfere concentriche la più interna limita un conduttore cui può essere comunicata la carica Q ; la media limita un corpo isolante (inizialmente neutro) che riempie tutta l'intercapedine, mentre è vuoto lo spazio fra essa e la sfera esterna, la quale limita internamente un conduttore cavo. Sappiamo che, non appena la carica Q sarà comunicata alla sfera interna, su questa superficie del conduttore esterno sarà distribuita per influenza una carica $-Q$, en-

10 trambe le cariche saranno distribuite uniformemente, le linee di flusso del campo avranno decorso radiale sia nel corpo isolante che nel vuoto: al limite esterno ed interno dell'isolante, per effetto dello spostamento reale, si riprodurranno due distribuzioni pure uniformi di cariche rispettivamente Q^* e $-Q^*$.

15 Consideriamo per ognuno dei tre vettori i valori φ_1 e φ_2 del flusso uscente da due superfici chiuse, l'una S_1 comprendente la sola sfera interna, l'altra S_2 comprendente anche la sfera media.

Per il vettore \mathbf{E} avremo

$$\varphi_1(\mathbf{E}) = 4\pi\epsilon_0^{-1}(Q - Q^*) = 4\pi\epsilon_0^{-1}\epsilon_p^{-1}Q$$

$$\varphi_2(\mathbf{E}) = 4\pi\epsilon_0^{-1}(Q - Q^* + Q^*) = 4\pi\epsilon_0^{-1}Q$$

20 $\varphi_1(\mathbf{E}_0) = \varphi_2(\mathbf{E}_0) = 4\pi\epsilon_0^{-1}Q$

$$\varphi_1(\mathbf{D}) = \varphi_2(\mathbf{D}) = 4\pi Q$$

L'interesse delle due ultime relazioni sta nella indipendenza del flusso dalla induttività del mezzo. E specialmente interessante è l'ultima perché il coefficiente che essa contiene è puramente numerico cioè $\varphi(\mathbf{D})$ è omogeneo con Q . Ciò ha spinto Heaviside¹ a cambiare unità di elettricità senza cambiare le relazioni dimensionali in modo che l'equazione si possa scrivere

$$\varphi(\mathbf{D}) = Q.$$

È questo il punto centrale della cosiddetta razionalizzazione delle formule, adottando la quale, se Q varia nel tempo, risulta anche $\mathbf{I} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d\varphi(\mathbf{D})}{dt}$ cioè uguale all'intensità di corrente che effettua il passaggio dall'involucro esterno alla sfera interna.²

Con l'importanza fisica connessa a \mathbf{D} è pure connessa la distinzione fra l'elettricità *libera* e *vera*.³

¹ Oliver Heaviside, 1850-1925, matematico, fisico, ingegnere inglese.

² Questa uguaglianza vale non solo nel caso di una speciale configurazione geometrica ora considerata, ma in generale; s'inquadra in una assai seducente rappresentazione cinematica o idrodinamica del fatto elettrico che si ottiene immaginando un fluido elettrico incompressibile capace di scorrere liberamente nei conduttori e di spostarsi negli isolanti provocando uno sforzo contrastante a tale spostamento. Tale immagine è più o meno riconoscibile a seconda della forma con cui venga enunciato nel celebre principio che *non esistono correnti aperte*, cioè che ogni corrente elettrica si può intendere chiusa tenendo conto dello spostamento maxwelliano. Ma ormai queste immagini sono risultate incompatibili con quanto si sa circa la struttura granulare delle cariche elettriche e la natura fisica delle correnti elettriche nei conduttori e negli isolanti stessi. Per questo il vettore è stato da noi presentato nel suo aspetto puramente matematico cioè come primo risultato intermedio nel calcolo del campo di forza elettrica della carica produttrice; e non abbiamo adottato la razionalizzazione (però dal punto di vista pratico può essere opportuna).

³ N.B. Sappiamo che il salto del vettore \mathbf{E} al traversamento della superficie che separa il corpo isolante dallo spazio vuoto e da un altro isolante, è dovuto alle cariche elettriche non neutralizzate che su tale superficie si attestano per

8) Leggi infinitesimali del campo elettrico.

Le diamo solo senza dimostrazione.

Alle superfici di discontinuità che separano i diversi corpi tra loro e dal vuoto i tre vettori presentano divergenze superficiali connesse con le densità superficiali dalle

$$5 \quad \operatorname{div}_a \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} 4\pi(\sigma + \sigma^*) \quad \operatorname{div}_a \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0^{-1} 4\pi\sigma \quad \operatorname{div}_a \mathbf{D} = 4\pi\sigma$$

dove σ è nulla per i corpi non elettrizzati; σ^* è nulla per i conduttori e per gli isolanti non polarizzati. Del resto σ e σ^* possono essere diversi da zero nello stesso luogo perché un isolante può essere contemporaneamente elettrizzato e polarizzato. Se è solo polarizzato sarà $\sigma = 0$. Alla superficie di separazione di un conduttore dall'isolante o dallo spazio vuoto, le tre divergenze superficiali si riducono ciascuna a un solo termine, cosicché le precedenti *relazioni esprimono in tre forme diverse il teorema di Coulomb*.

Alle superfici che separano un isolante dallo spazio vuoto e gli isolanti con diverse induttività tra loro, le divergenze superficiali constano in generale di due termini, ma se tali isolanti non sono elettrizzati alla superficie $\operatorname{div}_a \mathbf{E}_0 = \operatorname{div}_a \mathbf{D} = 0$.

Si presenta così una discontinuità della componente normale di \mathbf{E} mentre rimane continua la componente tangenziale e ne segue che inversamente si comportano i vettori \mathbf{E}_0 e \mathbf{D} per i quali si ha continuità della componente normale, discontinuità per la componente tangenziale. Da ciò si deduce la nota legge di rifrazione delle linee di flusso che, indicando con θ e θ' i due angoli che al limite di queste formano con la normale delle due bande, con ε_p e ε'_p le rispettive induttività, si scrive

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta'} = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon'_p} \quad \text{che vale anche se lo spazio da una banda della superficie è vuoto}$$

ponendo 1 in luogo della rispettiva induttività.

Appunto dal salto della componente normale del vettore \mathbf{E} è determinato un valore densità superficiale secondaria $\sigma^* = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} (\mathbf{E}_n^+ - \mathbf{E}_n^-)$

E per completare il quadro aggiungiamo il seguente sommario:

per le distribuzioni volumiche si hanno le seguenti espressioni, nelle quali ρ indica la densità di carica primaria, ρ^* la secondaria,

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} 4\pi(\rho + \rho^*) \quad \operatorname{div}\mathbf{E}_0 = \varepsilon_0^{-1} 4\pi\rho \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \quad .$$

30 D'altra parte, essendo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \varepsilon_p^{-1}$ e ε_p variabile da punto a punto, sarà

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \varepsilon_p^{-1} \operatorname{div}\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_0 \times \operatorname{grad}\varepsilon_p^{-1}$$

effetto dell'interno spostamento reale. Ma le teorie ignoranti tale spostamento reale, per poter liberare il posto all'altro ipotetico attribuivano quel salto alla diversa induttività interna come diversa attitudine dei vari mezzi di trasformare lo spostamento elettrico in forza elettrica e calcolavano come fittizia la carica che sarebbe capace di produrre un uguale salto in un mezzo omogeneo, e le davano anche il nome di elettricità *libera* contrapposta a elettricità *vera* riservata alle cariche che si possono somministrare ai conduttori (o anche ai corpi isolanti ai quali meno facilmente possono essere ritolte). In realtà, la cosiddetta elettricità libera non è meno vera di quella detta vera, è invece meno libera. Noi preferiamo chiamarla carica primaria e secondaria, così nel caso precedente Q e $-Q$ cariche primarie, Q^* e $-Q^*$ cariche secondarie; e diremo anche densità primaria e secondaria sia superficiale che volumica perché come può aversi una densità volumica in isolanti internamente elettrizzati, così può aversi una densità volumica secondaria in corpi isolanti non elettrizzati, ma sottoposti al campo elettrico e quindi polarizzati se la loro induttività varia con continuità fra le diverse parti. Per mostrare come dai casi semplici considerati si possa passare a leggi generali, osserviamo che niente vieta di assumere in linea generale come definizione dei vettori \mathbf{E}_0 e \mathbf{D} le relazioni che le legano al vettore \mathbf{E} il quale risulta direttamente dall'esplorazione del campo. In tutto il campo dunque è $\mathbf{E}_0 = \varepsilon_p \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_p \mathbf{E}$. I tre vettori hanno a comune le linee di flusso e l'orientazione.

come facilmente si riconosce dagli sviluppi mediante le coordinate cartesiane.

Se l'isolante è internamente polarizzato, non elettrizzato, cioè se $\rho = 0$, la formula che determina il valore di ρ^* si ricava facilmente, infatti in tal caso deve essere

$$\varepsilon_0^{-1} 4\pi\rho^* = -\mathbf{E}_0 \times \text{grad} \varepsilon_p^{-1} \quad \text{onde} \quad \rho^* = -\frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \text{grad} \varepsilon_p^{-1}}{4\pi} = -\frac{\mathbf{D} \times \text{grad} \varepsilon_p^{-1}}{4\pi}$$

5 valore che infatti si annulla se manca il campo (\mathbf{D} nullo) e il dielettrico è omogeneo ($\varepsilon_p = k$), nel qual caso la corrente di spostamento reale non produce nell'interno nessun compenso tra le cariche dei due segni, onde il corpo rimane nell'interno statisticamente neutro. In ogni caso il campo $[\mathbf{E}]$ è dappertutto lamellare; è solenoidale solo
 10 ove mancano cariche primarie e secondarie, invece i campi $[\mathbf{E}_0]$ e $[\mathbf{D}]$ non sono lamellari in generale, ma solo solenoidali ovunque manchino cariche primarie anche se non mancano cariche secondarie. Senza dubbio la considerazione dei tre vettori \mathbf{E} , \mathbf{E}_0 , \mathbf{D} è importantissima dal punto di vista matematico e la distribuzione fra cariche elettriche primarie e secondarie è utile anche dal punto di vista sperimentale; ma le
 15 interpretazioni tradizionali si sono dimostrate erronee in quanto che prospettavano come un puro intermediario matematico la carica elettrica secondaria disconoscendo quella realtà fisica la quale invece era attribuita al vettore \mathbf{D} , il quale, come del resto gli altri due, anzi a maggior ragione di essi, come quello che non è in diretta relazione con l'esperienza.

Richiamiamo per quello che seguirà, alcune nozioni sulla:

20

?) Energia del campo elettrostatico.

Consideriamo un involucro conduttore e nell'interno di esso un altro conduttore isolato, l'intercapedine essendo occupata da un mezzo isolante di induttività ε_p . Se invece l'intercapedine è vuota, le seguenti formule sono ancora valide salvo che al
 25 luogo del numero ε_p conterranno l'unità.

Poniamo zero il potenziale dell'involucro e indichiamo con V il potenziale del conduttore interno, Q la sua carica cui corrisponde sulla superficie interna dell'involucro la carica $-Q$, $C = Q/V$ la capacità elettrica.

30 L'ammontare dell'energia elettrica, cioè il lavoro che si può ottenere dal sistema all'atto della scarica, è notoriamente dato da

$$\int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV .$$

Mostriamo ora come si possa esprimere per mezzo dei vettori del campo in forma di integrale volumico esteso al campo stesso. Ricordo il lemma di Green

$$\int_a V \frac{dV}{dn} da = \int_\tau \Delta_1 V d\tau + \int_\tau V \nabla^2 V d\tau \quad ^1$$

35 Nel nostro caso l'ultimo termine è nullo essendo nulla la densità elettrica entro il mezzo isolante; l'integrale del primo membro si intende esteso a tutta la superficie che limita l'isolante, assumendo come verso positivo della normale n quello dall'isolante al conduttore. Essa superficie consta di due parti, l'una, quella corrispondente all'involucro, dà un contributo nullo per la posizione fatta riguardo al potenziale di

¹ $\Delta_1 = \nabla^2$; $-\nabla^2 = \text{div} \nabla = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}$; $\rho=0$ per ipotesi; $\rho^*=0$ perché $\varepsilon_p=k$.

questo, l'altra, se s'indica con E_l l'intensità ($= -\frac{dV}{dn}$) del campo al limite del conduttore, assunta positiva nel verso dal conduttore all'isolante, ed essendo V costante, si ha $V \int E_l da$ sempre positivo perché V ha lo stesso segno di Q e quindi di E_l .

5 Quanto all'integrale che resta nel secondo membro, ricordando che $\Delta_1 = E^2$
 dunque $V \int_a E_l da = \int_\tau E^2$ e, ricordando il teorema di Coulomb,
 $E_l^* = 4\pi\epsilon_p^{-1}\epsilon_0^{-1}\sigma$ otterremo $4\pi\epsilon_p^{-1}\epsilon_0^{-1}V \int_a \sigma da = \int_\tau E^2 d\tau$ ma $\int_a \sigma da = Q$
 onde infine $\frac{1}{2} QV = \int_\tau \frac{\epsilon_0\epsilon_p E^2}{8\pi} d\tau = \int_\tau \frac{ED}{8\pi} d\tau$.

Si può dunque attribuire a ciascun elemento di volume del campo un ammontare elementare di energia, ossia attribuire a questa nel campo stesso la densità $\frac{ED}{8\pi}$

10 Se si usa la razionalizzazione, questa espressione si scrive come il semiprodotto del modulo della forza elettrica per quello del vettore che, nel concetto tradizionale, è concepito come spostamento elettrico, quasi si trattasse dello spostamento coatto dell'oggetto sul quale la forza stessa agisce. E si presenta un'analogia, invero assai seducente, tra l'energia elettrica e l'energia di un corpo elettrico deformato. Tale analogia veniva messa in gran rilievo connettendola con i fenomeni strizionali che in effetto presenta un corpo isolante quando è elettricamente polarizzato. E ciò permetteva anche di non bruciare dietro di sé tutti i ponti quando si passò dalla teoria elastica della luce a quella elettromagnetica. Quando poi si trattava dello spazio vuoto, questo s'immaginava ripieno dell'etere al quale si conferivano appunto proprietà analoghe a quelle di un solido elastico. Ma ora che sappiamo meglio in che consistono le cariche elettriche, non possiamo immaginare spostamento di elettricità etc. ...

20 Confronteremo con l'energia elettrodinamica e rivedremo secondo la relatività.

CAP. IV

LEGGI FONDAMENTALI DELL'ELETTRODINAMICA

5

I) Richiamo di fatti comuni noti.

Prima di iniziare lo studio approfondito di queste leggi è opportuno ricordare un primo gruppo di fatti che quello studio deve inquadrare logicamente e matematicamente. Ciò serve anche a riconnettere la presente trattazione con le nozioni più elementari. Ricorderemo dunque quanto segue.

10

1) I primi esperimenti su un magnete, la distinzione dei poli nord e sud.

2) L'interazione tra magneti lunghi e sottili (solenoidi magnetici) riducibili a repulsione tra poli omonimi, attrazione tra eteronomi.

15

3) L'esperienza della calamita spezzata, gli estremi separati dalla rottura presentano polarità eteronime che prima non si manifestavano.

4) Gli esperimenti i quali mostrano che l'azione meccanica di un campo uniforme sopra un qualunque magnete presenta sempre una risultante delle forze nulla.

20

5) Gli esperimenti che mostrano come una sbarra di ferro posta in vicinanza di un magnete divenga anch'essa un magnete presentando nella parte vicina polarità opposta al più vicino polo del magnete, la magnetizzazione così prodotta permane in parte, tolta la causa.

6) E quelli dello stesso genere eseguiti con disposizioni di sufficiente sensibilità sulle più svariate sostanze opposti ai precedenti e la conseguente distinzione dei corpi in ferromagnetici, para e diamagnetici.

25

7) Le principali manifestazioni del magnetismo terrestre.

8) L'esperienza di Oersted¹ completata da Ampère e l'espressione generale del risultato mediante la nota regola, il polo N è sollecitato verso sinistra della corrente personificata.

9) La magnetizzazione per effetto di una corrente elettrica.

30

10) Il carattere mutuo delle azioni fra correnti e magneti.

11) Le interazioni fra fili percorsi da correnti elettriche: due fili mobili sono sollecitati a disporsi il più possibilmente prossimi fra loro e con versi di correnti concordi; una maglia flessibile tende a disporsi in modo da abbracciare la massima area compatibile con la lunghezza del filo.

35

12) L'orientamento di una spira percorsa da una corrente per effetto del magnetismo terrestre.

13) Il comportamento di eliche percorse da corrente (solenoidi elettrodinamici) simili a quello di sbarre magnetiche, sia rispetto alla terra sia tra solenoide e solenoide, sia tra solenoide e magnete.

40

14) Le correnti indotte per movimento relativo di fili rispetto al magnete o rispetto ad altri fili percorsi da corrente, e le regole di Lenz¹, le correnti indotte hanno tale verso che le azioni elettrodinamiche o elettromagnetiche si oppongono al moto.

¹ Hans Christian Ørsted, 1777-1851, fisico e chimico danese.

15) Le correnti indotte da variazioni di intensità della corrente induttrice, connessa alle precedenti dalla regola: l'interruzione della corrente induttrice, per una certa posizione, equivale all'allontanamento da quella posizione a distanza infinita, lo stabilirsi della corrente induttrice, per una certa posizione del filo, equivale all'avvicinamento da distanza infinita a quella posizione.

16) Le esperienze combinate di induzione in presenza di corpi ferromagnetici ed in generale dotati di apprezzabili proprietà magnetiche.

17) Le esperienze di autoinduzione.

II) Piano della presente trattazione.

Nella nostra trattazione ciò che è indicato ai numeri da 1 a 13 sarà inquadrato nella concezione del campo magnetico permanente, ossia costante nel tempo. Ciò che è indicato da 13 a 17 e altro sarà inquadrato nella concezione del campo magnetico variabile nel tempo. Veramente, siccome noi studiamo i fatti magnetici come fatti elettrodinamici, così questa distinzione non è sostanziale. In effetto il campo magnetico sarà studiato mediante fenomeni di induzione e questi si producono indifferentemente

a) per movimento dell'indotto,

b) per variazioni del campo prodotto da spostamenti di magneti o dal circuito induttore o da variazione della corrente circolante in questo, cioè da variazioni del campo stesso e queste già intervengono in molti dei casi elencati ai numeri fra 1 e 13; cosicché la distinzione riguarda unicamente il fine che ci proponiamo nel primo e nel secondo tempo della ricerca.

Ma come le variazioni del campo possono essere utilizzate per lo studio del campo costante? Ciò risulta chiaro se si osserva che quando si esperimenta con rapidi passaggi da un primo stadio permanente ad un secondo stadio permanente, la quantità totale di elettricità messa in moto nel circuito indotto risulta determinata unicamente da essi due stati, sicché operando in tal modo potremo ottenere come risultato le leggi del campo permanente indipendentemente dalle altre attinenti alle variazioni del campo nel tempo. Questa, la propagazione dell'energia e altri soggetti a ciò connessi faranno argomento della seconda parte di questo trattato.

Passiamo a descrivere una serie di esperimenti d'induzione atti a stabilire le leggi generali del campo comunemente chiamato magnetico, che sarebbe meglio chiamare elettrodinamico.

Per determinare la quantità totale di elettricità messa in moto nel circuito indotto useremo il galvanometro balistico; conformemente a quanto è detto nel capitolo precedente basterà sapere che la sua elongazione è proporzionale alla quantità di elettricità che lo traversa in un tempo breve rispetto al periodo dell'oscillazione.

Per gli esperimenti che ora descriveremo serve molto bene un galvanometro co-razzato Siemens con rocchetti di piccola resistenza. Gli esperimenti che qui descri-

¹ Heinrich Friederich Emil Lenz, 1804-1865, fisico russo di origine estone.

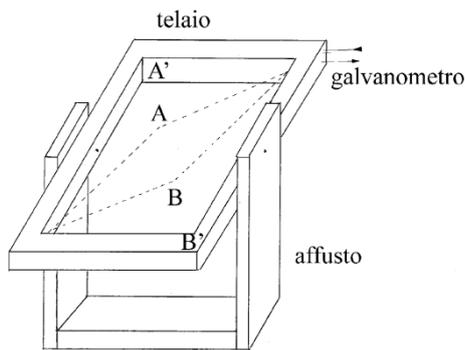
viamo sono in forma didattica, ma possono essere trasformati in esperimenti di grande precisione.

3) Campo terrestre; esperienza.

5 Un filo conduttore ha gli estremi congiunti ai serrafili del galvanometro; imprimendo al filo un brusco movimento generico, si ottiene un'elongazione la cui ampiezza dipende naturalmente dalla superficie descritta nello spazio dal filo. Se a due serrafili sono uniti gli estremi di un filo addoppiato, andata e ritorno, comunque questo sia mosso non si ottiene nessuna elongazione.

10 Esperimenti: fig. 1.

15 Un telaio di legno che comprende un'area sufficientemente grande è sistemato su un opportuno affusto in modo che si possa orientare a piacere; si può determinare volta per volta l'azimut e l'altezza sull'orizzonte della normale al piano. Un sistema di piccole pulegge e di cordicelle permette di trarre un filo conduttore flessibile, chiuso sul galvanometro balistico, in modo da fare o disfare con rapido movimento un cappio di area uguale a quella del telaio e o di area metà, tirando il punto A in A' e B in B' o ritirandoli in A e B o facendo la manovra per uno solo di essi. In ogni caso una



conveniente tensione esercitata sulla piccola puleggia mantiene nulla l'area dell'ansa formata dalla lunghezza superflua. La resistenza del circuito (galvanometro compreso) è nota e variabile a piacere. Ogni volta che una di queste manovre venga eseguita bruscamente, si ottiene un'elongazione dell'ago galvanometrico, la quale:

a) Cambia di segno invertendo il movimento (-);

b) È proporzionale all'area descritta dal filo;

c) Proporzionale al coseno dell'angolo che la normale fa con la direzione di massima elongazione;

30 d) È inversamente proporzionale alla resistenza del circuito.

Queste leggi si possono riassumere in una espressione matematica unica con l'introduzione del campo di un vettore che indicheremo con \mathbf{B} , il quale dunque rappresenta le condizioni fisiche naturali che rendono possibile le osservazioni degli effetti descritti.

35 Indichiamo con Q la quantità di elettricità che in ciascuna prova viene misurata dal galvanometro balistico, assunta positiva se circolante in un verso convenuto lungo il circuito; r la resistenza elettrica di questo; il vettore area piana il cui modulo è la misura dell'area limitata dal cappio, la direzione è perpendicolare al piano; quanto ai versi, nel caso che il cappio si formi, si prende tale che guardando in esso la girazione nel verso convenuto positivo si presenti oraria, se invece il cappio si disfa ad \mathbf{a} si attribuisce il verso opposto; la stessa area è dunque rappresentata da \mathbf{a} quando si forma da $-\mathbf{a}$ quando si annulla. Le leggi ora dette a parole si compendiano nella formula

$$-Q = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}}{R} \quad \text{onde} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = -QR = \varphi(\mathbf{B})$$

la quale formula dovendo essere vera qualunque sia \mathbf{a} basta a determinare \mathbf{B} .

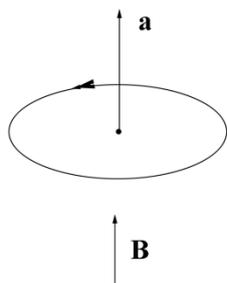
In conclusione il vettore \mathbf{B} risulta, in questa esperienza, determinato per mezzo del suo flusso.

5 A tutto rigore in questa formula è implicita l'ipotesi che il campo $[\mathbf{B}]$ sia uniforme dentro lo spazio entro il quale si sperimenta.

10 Orbene, ripetendo gli esperimenti, dopo aver spostato il telaio parallelamente a se stesso, si verifica che esso è sensibilmente uniforme addirittura in tutto lo spazio della sala. Se invece si ripetono gli esperimenti in luoghi assai lontani tra loro (mutando paese) si riconosce che il vettore varia in grandezza e direzione con la posizione geografica del luogo. Chiamiamo pure il campo $[\mathbf{B}]$ campo terrestre e siccome poi si riconosce che l'orientazione è la stessa di quella dell'ago della bussola di inclinazione, diremo addirittura *campo magnetico terrestre*. Del resto questo modo di esplorare il campo magnetico terrestre è già classico.

15 4) Campo di una corrente elettrica; esperimenti.

Dato al telaio un orientamento per cui l'effetto del campo terrestre sia nullo, collochiamo in vicinanza una matassa di qualsiasi forma di filo conduttore percorso da una corrente, che diremo inducente, la cui azione diretta sull'ago del galvanometro sia



insensibile o compensata. L'intensità della corrente è misurata per es. da un reometro a filo caldo. Facendo muovere il filo del telaio come nei precedenti esperimenti si osservano i seguenti effetti:

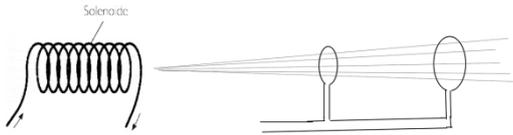
a) elongazione del galvanometro a ogni brusco movimento del filo, la quale in questo caso non è imputabile al campo magnetico terrestre;

b) l'elongazione che si ottiene, quando il filo descrive una certa area, è la somma di quelle ottenute quando esso descrive le parti in cui l'area può essere scomposta;

30 c) lo stabilire o l'interrompere la corrente nella matassa produce rispettivamente effetti uguali alla formazione e alla scomparsa del cappio. L'inversione rapida della corrente dà un'elongazione doppia.

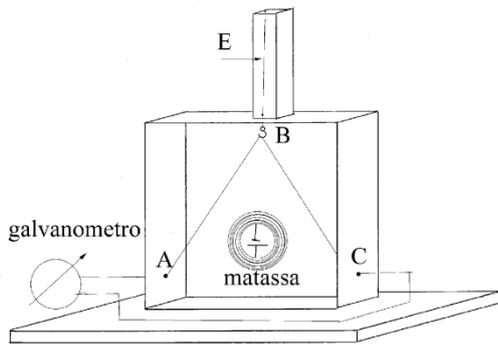
35 Da questa esperienza si conclude che l'effetto della corrente elettrica sul circuito del galvanometro può attribuirsi ad un campo vettoriale prodotto dalla corrente stessa, omogeneo al campo magnetico terrestre. Per indicare tale campo adopereremo la stessa notazione $[\mathbf{B}]$ intesa in senso generale. E, generalizzando la precedente relazione, scriveremo $\varphi(\mathbf{B}) = -QR$ essendo $\varphi(\mathbf{B})$ il flusso traversante l'area descritta nel movimento del filo indotto. Con la stessa disposizione si verifica pure, che variando l'intensità della corrente, i rapporti fra i valori di Q per due qualsiasi superficie descritte, diverse fra loro, non variano e d'altra parte i valori di Q sono proporzionali alle rispettive intensità. Si conclude: l'orientazione di \mathbf{B} è indipendente dall'intensità della corrente, la grandezza è proporzionale.

40 5) Proprietà geometriche del campo $[\mathbf{B}]$.



Evanescenza a distanza infinita. Il buon senso suggerisce che il vettore \mathbf{B} dovrà svanire a grande distanza dal circuito elettrico che lo produce, ma si capisce che non sarà possibile, con

5 una semplice esperienza, precisare l'ordine infinitesimale di tale evanescenza. È facile però riconoscere che tale ordine è superiore al secondo prendendo come infinito del I ordine la distanza di un punto qualunque dalla matassa inducente. A tal fine si preparano due maglie di filo conduttore, l'una abbracciante un'area abbastanza piccola l'altra molto grande e le disporremo a distanze tali da un qualche punto della matassa che le loro aree stiano in ragione diretta dei quadrati di tali distanze. Se giacciono in piani paralleli saranno vedute da quel punto sotto lo stesso angolo solido. Le due maglie sono unite in serie per mezzo dei doppi conduttori e il circuito è chiuso sul galvanometro. Si riconosce allora facilmente che l'effetto d'induzione è dovuto quasi totalmente alla maglia più vicina, perché esso si inverte quasi perfettamente quando l'orientazione di questa venga cambiata nell'opposta. Ne segue che l'intensità del campo non solo decresce rapidamente, ma decresce pure il prodotto di essa per il quadrato della distanza. Quando saranno precisate le leggi del campo, dimostreremo che l'ordine di evanescenza è il terzo.



Il campo $[\mathbf{B}]$ è solenoidale. Un avvolgimento di forma qualsiasi è sospeso ai due fili che portano a esso la corrente. Un filo flessibile è chiuso sul galvanometro: di esso solo il tratto ABC può muoversi, ma è richiamato alla forma e posizione indicate nella figura da un forte elastico BE . Dando un brusco movimento al filo ed abbandonandolo poi subito si può fargli descrivere l'area di una superficie chiusa la cui

forma si può variare a capriccio, esso può racchiudere o no la manfella a seconda che si passi o no dalla parte opposta dei fili di sospensione. Non si ottiene nessuna elongazione dell'ago. Ma è più comodo dare successivi bruschi spostamenti, distanziati nel tempo, e infine abbandonare il filo al richiamo dell'elastico. La somma algebrica delle elongazioni corrispondenti ai successivi spostamenti (compreso quest'ultimo impresso dall'elastico) risulta nulla. Ciò mostra che il flusso del vettore \mathbf{B} traversante una superficie chiusa qualunque è nullo. Dunque il campo vettoriale $[\mathbf{B}]$ è solenoidale; quindi il flusso tagliato dal filo nella formazione del cappio è in valore assoluto uguale senz'altro al flusso concatenato che si fa e si disfa, qualunque sia la superficie descritta dal filo. Quando al segno e ai versi varranno le solite convenzioni tra il verso positivo lungo il contorno e il verso positivo di una linea che passa per esso, ossia quello della normale a una superficie da esso limitata, e quindi anche dal vettore area della normale associato a questa se piana; a chi guarda in questo verso, il verso positivo del contorno si presenti orario. Tutto questo deve essere considerato in rapporto alla precedente esperienza nella quale si stabiliva e interrompeva la corrente nell'avvolgimento situato in vicinanza del telaio. In altre parole essendo il campo $[\mathbf{B}]$ solenoidale, il flusso ha lo stesso valore traverso qualunque area terminata a un dato

contorno; ossia il valore del flusso di una certo campo $[B]$ è determinato dal solo contorno. I due modi di sperimentare, l'uno formando e disfacendo il cappio, l'altro stabilendo e interrompendo la corrente quando il cappio è formato in precedenza, sono dunque equivalenti non solo in quell'esperimento, ma in qualunque altro. (Vera-

5

mente è difficile eseguire tutto il movimento in un tempo tanto breve che l'ago del galvanometro non risenta un apprezzabile scotimento, ma quel che importa è che esso resta poi subito in quiete nella posizione in cui si trovava).

Stabilita tale equivalenza, passiamo a stabilire un'altra proprietà generale nel campo vettoriale $[B]$, mostriamo cioè che esso ammette un potenziale polidromo. A tal fine useremo come indotto un

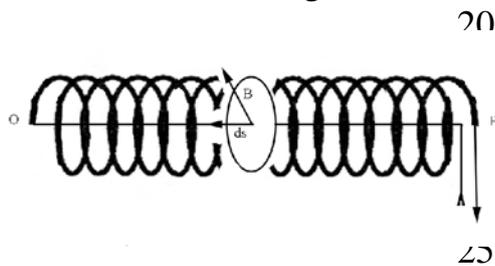
10

3) Solenoide flessibile (inestendibile).

Si realizza con una buona approssimazione con un tubo di gomma a forti pareti, molto lungo in confronto al suo diametro, sulla cui superficie (cilindrica quando esso è diritto) viene avvolta un elica destrorsa (come le viti comuni) di filo sottile a spire avvicinate, conduttore con un passo costante. Il filo ritorna per l'interno del tubo e i

15

due capi si prolungano in un doppio filo al galvanometro balistico. Indichiamo con a l'area (piccola) di ciascuna spira, assumendo il verso positivo sul filo (cioè quello assunto come positivo, per la corrente che lo percorre) appaia destrorso, ds l'elemento lineare della linea regolare OP lungo la quale è disposto il solenoide, θ l'angolo



20

che B fa con ds , n_1 il numero di spire per unità di lunghezza. Si vede subito che il flusso di B concatenato con l'insieme delle spire (trattando la somma di moltissimi termini piccolissimi come un integrale), risulta espresso da

$$\varphi[B] = \int_0^P (B) a n_1 \cos\theta ds = n_1 a \int_0^P B_x ds$$

25

Dunque le elongazioni galvanometriche danno il modo di misurare ora l'integrale del vettore B lungo una linea qualunque. Per stabilire queste formule si è considerata ciascuna spira come se fosse una linea esattamente chiusa o meglio si può considerare l'insieme di tutte le spire come un sistema costituito da altrettante linee chiuse e da un tratto, formato da tanti minimi segmenti, disteso lungo il solenoide da O a P il quale risulta negli effetti compensato dal tratto di ritorno da P a O .

30

L'approssimazione è tanto migliore quanto più sottile è il solenoide rispetto alla sua lunghezza e al raggio della massima curvatura che può assumere e quanto più fitte sono fra loro le spire.

35

Con questo apparecchio si possono fare variati esperimenti atti a illustrare le proprietà del campo prodotto dalla corrente circolante in un conduttore; i quali esperimenti si possono raccogliere in due gruppi, che si eseguono rispettivamente:

- 1) stabilendo, interrompendo, invertendo la corrente che produce il campo;
- 2) imprimendo bruschi spostamenti al solenoide mentre la corrente è mantenuta costante.

40

Sugli esperimenti del primo tipo, il campo terrestre non ha naturalmente alcun effetto perché non c'è spostamento dell'indotto, gli effetti che questo può avere su quelli del secondo gruppo, possono essere, se occorre, corretti per confronto con esperimenti-

ti eseguiti senza la corrente, e nei quali s'imprimano al solenoide gli stessi spostamenti. Sono da ascrivere al secondo gruppo anche gli esperimenti che si possono eseguire tenendo immobile il solenoide e imprimendo bruschi spostamenti al conduttore percorso da corrente. Con gli esperimenti del I gruppo si determina direttamente l'integrale lungo la linea da O a P su cui esso giace, mediante le formule

$$- \frac{QR}{n_1 a} = \int_0^P \mathbf{B} x ds \quad \text{valevole per lo stabilirsi della corrente}$$

$$\frac{QR}{n_1 a} = \int_0^P \mathbf{B} x ds \quad \text{valevole per l'annullamento della corrente}$$

$$\frac{1}{2} \frac{QR}{n_1 a} = \int_0^P \mathbf{B} x ds \quad \text{valevole per l'inversione della corrente}$$

I risultati più significativi sono i seguenti

1) Si verifica che per una stessa linea :

il flusso di \mathbf{B} $\int_0^P \mathbf{B} x ds$ è proporzionale all'intensità della corrente che produce il campo.

2) si verifica che è $\int_0^P \mathbf{B} x ds = - \int_P^0 \mathbf{B} x ds$ per mezzo di due misure eseguite disponendo il solenoide lungo la stesa linea, ma in versi opposti, cioè con gli estremi scambiati.

3) Si verifica che il valore di $\int_0^P \mathbf{B} x ds$ è lo stesso per tutte le linee terminate agli stessi estremi e tali che si possa portare una di esse a coincidere con un'altra qualsivoglia, mediante un movimento continuo senza tagliare il conduttore in cui circola la corrente che produce il campo, cioè con uno di questi movimenti che possano essere effettuati realmente mantenendo fissi gli estremi del solenoide.

4) I valori di $\int_0^P \mathbf{B} x ds$ per due linee aventi gli stessi estremi, ma tali che l'una si possa portare a coincidere con l'altra mediante un movimento del genere ora detto, sono diversi.

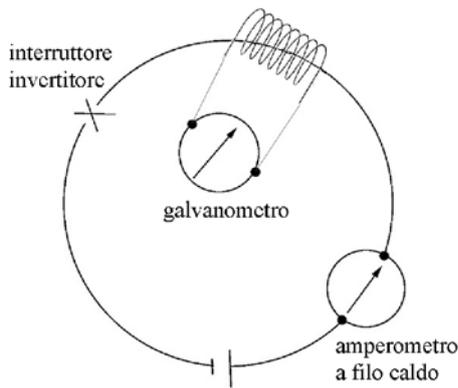
5) disponendo il solenoide flessibile lungo una linea chiusa (O e P coincidono) si misura $\int_0^P \mathbf{B} x ds$ e si trova che il suo valore è nullo per qualunque linea non concatenata col circuito che produce il campo.

6) Per le linee concatenate esso dipende (a parità di corrente produttrice) unicamente dal numero delle concatenazioni, al quale è proporzionale, e dal verso di esse, con tale verso invertendosi. Questi risultati bastano a dimostrare che il campo è un campo circuitale il cui rotazionale concorda con la corrente elettrica che lo produce.

Gli esperimenti del secondo tipo dimostrano la stessa cosa, citiamo quelli che seguono.

1) Mantenendo fissi gli estremi O e P del solenoide flessibile imprimiamo a questo un brusco spostamento che deformi comunque la linea su cui è disposto: l'effetto d'induzione è nullo. Ciò conferma il risultato terzo del primo gruppo di esperimenti.

2) Mantenendo fisso uno degli estremi in O si sposti bruscamente l'altro da P in P' . Si misura così il valore $\int_P^{P'} \mathbf{B} x ds$ ottenendo lo stesso effetto di induzione (e quindi lo stesso valore) come se il solenoide fosse disposto secondo la linea che



vada da P a P' che, insieme con quella corrispondente alla posizione iniziale e finale del solenoide, formi una figura chiusa non concatenata col circuito produttore del campo (cfr. risultati 4, 5, 6 del I gruppo).

3) Mantenendo ancora fisso l'uno degli estremi si muova rapidamente l'altro estremo lungo una qualsiasi linea chiusa non concatenata col circuito che produce il campo. L'effetto d'induzione è nullo (cfr. I gruppo, 5)

4) Se il percorso chiuso è invece concatenato, si ottiene un effetto non nullo (dipende dal

numero delle concatenazioni) che risulta uguale a quello che si può misurare col primo metodo (6°). Un esperimento didattico assai suggestivo è quello che segue. Si
 15 forma un circuito produttore del campo mediante un conduttore flessibile rivestito di guaina isolante, attaccato ai poli di una batteria di accumulatori. Inserendo un amperometro a filo caldo e un interruttore invertitore, con esso si concatena un certo numero di volte il solenoide flessibile, i cui estremi poi si assicurano uniti fra loro. Si osserva che il galvanometro rimane insensibile a qualunque rapido movimento importante le più svariate deformazioni dell'insieme, purché rimanga costante l'intensità
 20 della corrente. Se invece si stabilisce, interrompe, inverte bruscamente la corrente, si ottengono rispettivamente effetti identici per qualunque configurazione tra le svariatissime che siano date al sistema approfittando della flessibilità delle parti; gli effetti risultano in ogni caso (già lo sappiamo) proporzionali all'intensità e al numero delle concatenazioni. Tutto quanto è qui esposto si compendia nella formula

$$\int_0^P \mathbf{B} \times d\mathbf{s} = cki \quad \text{dove } c \text{ esprime una costante di proporzionalità, } k \text{ è il numero delle concatenazioni, } i \text{ l'intensità della corrente.}$$

Riepilogando, questi esperimenti dimostrano le seguenti proprietà del campo:

- 1) esso è proporzionale all'intensità della corrente che lo produce;
- 30 2) esso svanisce all'infinito con ordine superiore a 2 e quindi a fortiori con ordine superiore a $\frac{3}{2}$;
- 3) esso ha divergenza nulla (solenoidale);
- 4) il suo rotore è localizzato nella corrente elettrica che lo produce.

Consideriamo questi risultati in rapporto con i *preliminari matematici* e ciò con il
 35 teorema di unicità del § 5 e col 9 e segg.; si riconosce facilmente che, essendo sottile il filo che conduce la corrente, le leggi ivi espresse per il campo con anello vorticoso sottile ci danno immediatamente quella del nostro campo $[\mathbf{B}]$ pur di cambiare opportunamente alcune notazioni, cioè scrivendo \mathbf{B} al luogo di \mathbf{A} e μi al luogo di j , cioè facendo la posizione $c = 4\pi\mu$, e scriveremo così

$$40 \quad \mathbf{B} = \text{grad}V \quad \text{con} \quad V = \mu i (\Omega + k4\pi) \quad \text{ove ora } \Omega \text{ è l'angolo solido sotto cui, dal punto di vista considerato, si vede il circuito che produce il campo. Cosicché l'insieme dei precedenti risultati si può riassumere nella formula } \quad \mathbf{B} = \mu i \text{grad}(\Omega + k4\pi).$$

Cosicché è giustificato il nome che si suole dare al solenoide flessibile di misuratore di potenziale. Se non occorre una grande flessibilità, invece dell'anima di gomma è preferibile un'anima di cuoio, per la quale sono ancora più trascurabili le variazioni della sezione trasversale.

5 E osserviamo che \mathbf{B} , i risultano da misure elettriche e $\text{grad}(\Omega + k4\pi)$ da calcoli basati su misure geometriche onde, a parte le difficoltà pratiche che si presentano caso per caso, da questa equazione che è valida a condizione che il mezzo ambiente sia omogeneo, può essere ricavato il valore di \mathbf{B} punto per punto. Esclusi i corpi che presentano proprietà magnetiche, quali il ferro, il nichel ecc., cioè per la massima parte dei materiali che possono costituire il mezzo ambiente, il valore di μ è assai poco diverso da quello di μ_0 corrispondente allo spazio vuoto; per l'aria atmosferica la differenza è con discreta approssimazione trascurabile.

15 È manifestamente opportuno adottare le notazioni che sono già comunemente usate, specialmente in vista degli argomenti che tratteremo nel seguente capitolo. Ebbene poniamo $\mathbf{H} = \text{igrad}\Omega$ da cui $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. \mathbf{H} è il vettore del campo quale si può calcolare direttamente dalle correnti che lo produce; \mathbf{B} è il vettore del campo quale si manifesta agli effetti di induzione mediante i quali viene esplorato. (\mathbf{H} non è misurato sperimentalmente).

20 6) Leggi laplaciane.

D'altra parte, il paragrafo 13 dei Pr. Mat. mostra come si possa attribuire a ciascun elemento ds del filo un contributo infinitesimale al campo, cioè sia al campo \mathbf{H} sia al campo \mathbf{B} ; indicando con \mathbf{h} e \mathbf{b} tali contributi infinitesimali, otteniamo le due espressioni vettoriali

$$\mathbf{h} = i \frac{ds \wedge \mathbf{r}_n}{r^2} \quad \mathbf{b} = \frac{\mu ds \wedge \mathbf{r}_n}{r^2}$$

25 che diremo laplaciane perché la prima di esse, sebbene in forma matematica diversa, fu data da S.P. Laplace, il quale la ricavò dalla legge di Biot¹ e Savart² come legge elementare delle azioni elettromagnetiche.

Se il conduttore non è un filo sottilissimo, ma ha una sezione trasversale notevole, allora lo penseremo scomposto nei tubi sottili di flusso del vettore \mathbf{j} densità di corrente e scriveremo le leggi in corrispondenza all'elemento di volume

$$\mathbf{h} = \frac{i \wedge \mathbf{r}_n}{r^2} d\tau$$

$$\mathbf{b} = \mu \frac{i \wedge \mathbf{r}_n}{r^2} d\tau$$

35 le quali valgono se non c'è apprezzabile diversità quanto al valore di μ tra il materiale del conduttore e quello dell'ambiente. Conformemente a quanto esposto nei Prel. Mat. a queste leggi sono equivalenti le due $\text{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{i}$ $\text{rot}\mathbf{B} = \mu 4\pi\mathbf{i}$.

7) Forza elettromotrice di induzione.

La produzione della corrente indotta, attesta la presenza nel circuito indotto di una forza elettromagnetica. Quale sarà il suo valore istante per istante? È naturale scrivere per tale valore $E = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$ indicando con $\Phi(\mathbf{B})$ il valore del flusso

¹ Jean-Baptiste Biot, 1774-1862, fisico e matematico francese.

² Felix Savart, 1791-1841, fisico e medico francese.

all'istante. Infatti la legge di Ohm ci suggerisce di scrivere per il valore all'istante della corrente indotta $\frac{dQ}{dt} = i = \frac{E}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dt}$ onde, essendo $dQ = idt$ la quantità di elettricità circolante nel tempuscolo dt , si ha che, integrando dal valore iniziale $\Phi_1(B)$ al finale $\Phi_2(B)$, ci dà $QR = -[\Phi_2(B) - \Phi_1(B)]$ e se è $\Phi_1(B) = 0$ e poniamo invece di $\Phi_2(B)$ semplicemente $\Phi(B)$, otteniamo appunto $QR = -\Phi(B)$, cioè la relazione fondamentale che ci ha servito a definire il campo $[B]$.

Ma è necessaria un'osservazione importante: anche la corrente indotta, finché dura, dovrà ben produrre il suo campo e questo porterà inevitabilmente con le sue variazioni un contributo alla forza e.m.i.. Vediamo che ciò non pregiudica il risultato ottenuto. Poniamo infatti nella prima formula, invece di $\Phi(B)$, $\Phi_1 + \Phi'$ avremo

$E = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi'}{dt}\right)$ ove ora Φ_1 indica la parte del flusso proveniente dal campo terrestre o dalla corrente induttrice (secondo i casi) e Φ' la parte proveniente dalla sola corrente indotta. Integrando si presenta anche il termine

$\int_1^2 -\frac{d\Phi'}{dt} dt = -(\Phi'_2 - \Phi'_1)$ il quale però risulta nullo perché l'integrazione è estesa dallo stato iniziale in cui la corrente indotta non è iniziata allo stato finale, in cui è già estinta, cosicché Φ'_1 e Φ'_2 sono entrambi nulli.

Era dunque legittimo l'uso fatto della formula per la determinazione del campo terrestre o del campo di una corrente. In conclusione nelle esperienze fin qui fatte gli effetti d'induzione prodotti dalla corrente indotta nei vari momenti della sua durata si compensano, risultandone infine un effetto complessivo nullo.

E resta inteso che la formula generale $E = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$ vale ad ogni istante purché in essa $\Phi(B)$ rappresenti tutto il flusso complessivo concatenato al circuito.

Si deve anche osservare che la fase di estinzione della corrente indotta, come vedremo nella seconda parte di questo trattato, teoricamente durerebbe un tempo infinito, ma in pratica basta nei casi più comuni un tempo assai breve perché si riduca ad un valore inapprezzabile.

30 8) Verso delle correnti indotte.

Il segno di questa formula generale $E = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$ considerato in confronto con la convenzione fatta nei versi e sui segni per il campo, indica il verso alla f.e.m. tale che questa tenda a produrre una corrente il cui campo si concatena col circuito indotto in verso opposto al campo inducente, se crescente, concorde se decrescente. Disponendo due circuiti in modo che decorrano l'uno prossimo all'altro, la corrente elettrica indotta in questo, allo stabilirsi di una corrente induttrice nel primo, ha verso opposto a questa, all'interruzione ha verso concorde, come si verifica con facili esperimenti.

40 9) Induzione mutua. Autoinduzione.

Quanto precede chiarisce il significato di queste denominazioni. Il flusso del vettore $[\mathbf{B}]$ il quale si concatena col circuito indotto per effetto della corrente i circolante nel circuito induttore, per una data configurazione geometrica è proporzionale all'intensità e potrà scriversi $\Phi(B) = \mathfrak{N} i$ con \mathfrak{N} coefficiente di mutua induzione.

Similmente il flusso concatenato con un circuito per effetto della corrente circolante in esso, indicando ancora con i l'intensità di questa si scriverà $\Phi(B) = \mathfrak{L} i$ dove \mathfrak{N} e \mathfrak{L} indicano coefficienti il cui valore dipende dalla configurazione geometrica dei circuiti e dal valore di μ , essi si chiamano rispettivamente coefficiente di induzione mutua e coefficiente di autoinduzione. Invero per l'induzione mutua la legge generale prenderà la forma:

$$E = - \frac{d}{dt} \mathfrak{N} i = - \left(\mathfrak{N} \frac{di}{dt} + i \frac{d}{dt} \mathfrak{N} \right)$$

e per l'autoinduzione $E = - \frac{d}{dt} \mathfrak{L} i = - \left(\mathfrak{L} \frac{di}{dt} + i \frac{d}{dt} \mathfrak{L} \right)$ le quali, nei casi di circuiti fissi (\mathfrak{N} e \mathfrak{L} costanti), divengono rispettivamente

$$E = \mathfrak{N} \frac{di}{dt} \qquad E = - \mathfrak{L} \frac{di}{dt}$$

10) Misure e sistemi di misure.

Prima di proseguire è opportuno considerare gli enti matematici fin qui introdotti dal punto di vista metrico, e scegliamo il sistema di misura più conveniente per la chiarezza dei concetti.

A tal fine occorre prendere in considerazione la quantità indicata con la lettera μ la quale è di centrale importanza per la relazione tra causa ed effetto nei fenomeni elettrodinamici.

Riportiamoci alla relazione generale $QR = \mu i \varphi(\text{grad} \Omega)$ e osserviamo che essa è atta a stabilire una relazione metrologica tra quantità tutte di specie diversa le cui misure sono indicate con $Q, B, \mu, i, \varphi(\text{grad} \Omega)$, delle quali l'ultima essendo puramente geometrica dipende dalla sola unità di lunghezza, avendo l'espressione dimensionale $[L]$. D'altra parte la definizione stessa d'intensità di corrente connette la specie i alla Q mediante una misura di tempo.

Ne risulta una relazione tra le misure R e μ mediante misure di lunghezza e di tempo. È noto che, se si adotta il sistema elettromagnetico, cioè si pone (nel vuoto) $\mu = 1$, tale relazione permette di ottenere la misura assoluta di una resistenza elettrica in base alle sole unità di lunghezza e di tempo secondo l'espressione dimensionale $[LT^{-1}]$. E volendo poi passare a stabilire le unità elettriche delle industriali o pratiche, tal processo, od altro equivalente, permette di eseguire, sulla base di misure assolute di lunghezza e di tempo e relative elettriche, la determinazione dell'Ohm. Per altra via, ma sempre in base alla posizione del sistema e.m., si fa la misura di i e di Q e per tale via si può determinare poi l'Ampère ed il Coulomb. Invece nel sistema elettrostatico, Q è stabilito mediante la legge di Coulomb avendo posto nello spazio vuoto $\epsilon_0 = 1$ ed essendo per altra via già connesso i con R si può ricavare il valore di μ_0 che risulta avere le dimensioni $[L^{-2}T^2]$ le quali invece spettano alla misura di ϵ_0 nel sistema elettromagnetico. Il lettore vede bene che tali espressioni dimensionali, non essendo compatibili tra loro, non solo escludono un'unificazione dei

due sistemi, ma non giovano affatto a chiarire, anzi mascherano ed oscurano la natura fisica degli enti rappresentati da μ_0 e ε_0 e quindi anche di tutti gli altri. Per questo noi preferiamo adottare come principale sistema metrico di riferimento un sistema conforme alla concezione metrologica di Giorgi, che evita la biforcazione del sistema C.G.S. in due e non nasconde la natura fisica di μ_0 e ε_0 . A tal fine è opportuno, come abbiamo già fatto nei cenni elettrostatici per ε , ε_0 , scindere μ in due fattori, ponendo $\mu = \mu_0 \mu_p$ essendo μ_p un numero posto uguale a 1 nello spazio vuoto, il cui valore per ciascun mezzo corporeo rappresenta il coefficiente specifico di tale mezzo, del quale nel seguente capitolo daremo la generale interpretazione. μ_0 rappresenta invece una costante fisica universale della quale ora assegneremo le dimensioni (tradizionalmente μ è detta induttività assoluta, μ_0 induttività nel vuoto e μ_p induttività relativa, ma la nomenclatura non corrisponde alla concezione attuale).

Ciò premesso e tenendo conto della relazione $[\mathbf{B}] = \mu_0 \mu_p i \text{grad}\Omega$ osserviamo la successione delle operazioni che permettono di calcolare il vettore $[\mathbf{B}]$ dal circuito elettrico che lo produce.

- 1) Operazione puramente geometrica che dà il vettore $\text{grad}\Omega$;
- 2) moltiplicazione per il fattore i che dà un vettore con significato fisico ($i \text{grad}\Omega$) che, per ragioni che saranno meglio spiegate nel successivo capitolo, abbiamo indicato con \mathbf{H} ;
- 3) moltiplicazione per μ_0 che trasforma questo in un vettore di altra specie ($\mu_0 i \text{grad}\Omega$);
- 4) moltiplicazione per il fattore numerico μ_p che dà infine un altro vettore (della stessa specie del precedente) cioè $[\mathbf{B}]$; per i coefficienti d'induzione abbiamo l'espressione generale

$$\varphi \frac{(\mu_p \mu_0 i \text{grad}\Omega)}{i} = \varphi (\mu_p \mu_0 \text{grad}\Omega) .$$

Orbene, conformandoci in linea generale ai concetti del Giorgi, noi adotteremo tre unità fondamentali di lunghezza, tempo e massa e una quarta di natura elettrica. La specie di questa può essere scelta a piacere, la comodità di avere un campione depositato e altre ragioni pratiche hanno suggerito la resistenza, se invece le esigenze pratiche vengono messe da parte, riesce più naturale adottare una carica elettrica. Occorre in queste considerazioni generali precisare del tutto le unità fondamentali, basta avere scelto le quattro specie, cioè basta dire adottiamo un sistema $[\text{LMTQ}]$.

1) Potenziale elettrico $[\mathbf{V}] = [\text{L}^2 \text{MT}^{-2} \text{Q}^{-1}]$.

2) Intensità di corrente $[i] = [\text{QT}^{-1}]$.

3) Resistenza $[\mathbf{R}] = [\text{L}^2 \text{MT}^{-2} \text{Q}^{-2}]$.

35 $[\varphi(\mathbf{B})] = [\mathbf{RQ}] = [\text{L}^2 \text{MT}^{-1} \text{Q}^{-1}]$.

$[\mathbf{B}] = [\varphi(\mathbf{B}) \text{L}^{-2}] = [\text{MT}^{-1} \text{Q}^{-1}]$.

$[\text{grad}\Omega] = [\Omega \text{L}^{-1}] = [\text{L}^{-1}]$.

$[\mathbf{H}] = [i \text{L}^{-1}] = [\text{QT}^{-1} \text{L}^{-1}]$.

$[\mu] = [\mu_0] = [\mathbf{BH}^{-1}] = [\text{LMQ}^{-2}]$.

40 $[\mathcal{L}] = [\mathcal{R}] = [\mu][\text{L}^2][\text{grad}\Omega] = [\text{L}\mu] = [\text{L}^2 \text{MQ}^{-2}]$.

Osserviamo che la posizione del sistema elettromagnetico crea un'apparente omogeneità tra i due vettori \mathbf{B} ed \mathbf{H} e tra i coefficienti di induzione e le lunghezze:

mentre la posizione fondamentale del sistema elettrostatico crea apparente omogeneità tra E e D , tra capacità elettrica e lunghezza; l'eliminazione di tali apparenti omogeneità è confacevole alla chiarezza della teoria e costituisce un vantaggio del sistema a quattro unità.

5

11) Principi generali per la misurazione dei coefficienti di induzione.

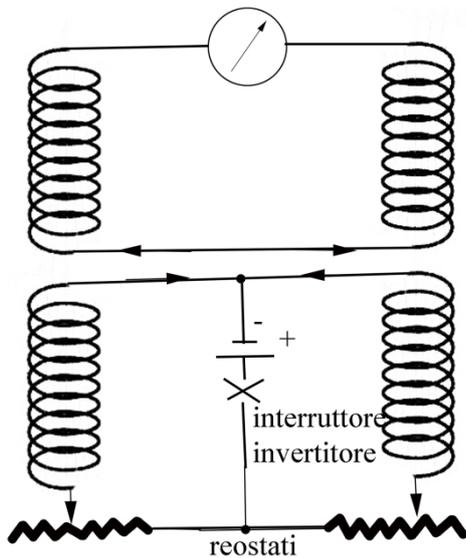
Da quanto precede è chiaro che si potrà ottenere il valore del coefficiente d'induzione calcolando il valore φ (grad Ω) dalle leggi geometriche del campo con anello vorticoso sottile applicato al caso che si presenta.¹ Tale calcolo, solo per configurazioni geometriche particolarmente semplici e simmetriche può essere eseguito senza troppe complicazioni, e può risultare in qualche caso assai agevole.

10

Quando al valore di μ esso può si può ricavare una volta per tutta per ciascun mezzo con una esperienza d'induzione di fili sottili (cioè tale che il volume occupi una porzione trascurabile nel campo), s'intende, dopo aver calcolato il coefficiente geometrico. Del resto basta che questa determinazione sia fatta una volta per l'aria o

15

in uno spazio vuoto e poi il valore per gli altri materiali si può ricavare con più semplici esperienze di confronto. Ciò sia detto in generale, ma è bene ora venire al concreto ed illustrare.



12) Confronto tra i due coefficienti di mutua induzione.

Per una disposizione atta al confronto tra due coefficienti d'induzione mutua presentiamo questa che può chiamarsi *bilancia d'induzione*. La figura ne dà lo schema. I due indotti sono disposti in serie tra loro e con un galvanometro sensibile G, i due induttori ciascuno con l'aggiunta di un reostato regolabile, formano invece due rami in parallelo di resistenza rispettivamente R_1 e

30

R_2 , i quali vengono alimentati da un elettromotore attraverso un interruttore invertitore. Le comunicazioni sono stabilite in modo che le due forze e.m. indotte risultino nel circuito del galvanometro dirette in versi opposti. Indichiamo con i_1 e i_2 nei due rami induttori; la condizione perché il galvanometro resti a zero quando si manovra l'interruttore invertitore è manifestamente espressa dalla relazione $M_1 i_1 =$

35

$M_2 i_2$ che, essendo $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}$ si può scrivere $\frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1}{R_2}$ ecco come il confronto tra i due coefficienti d'induzione mutua vien ricondotto a quello di due resistenze, Sarebbe alieno dal carattere di questo libro trattarsi su altri esempi e altri metodi di misura per coefficienti d'induzione mutua e autoinduzione. Invece dare-

¹ Piacemi ricordare qui che Antonio Ròiti (fisico italiano 1843-1921), nell'ultima edizione dei suoi "elementi di fisica", già nel 1919, scriveva le espressioni dimensionali dei coefficienti d'induzione $[\mu L]$ e non $[L]$ come allora era in uso e da cui è derivata per il coefficiente di autoinduzione la notazione \mathcal{L} che noi pure conserviamo, ma che non deve generare confusione.

mo qui esempi del calcolo dei valori del campo e dei coefficienti d'induzione per alcuni casi particolarmente importanti.

13) Solenoide elettrodinamico neutro.

5 Un anello rotante, con sezione di forma qualsiasi, porta alla superficie un avvolgimento di filo conduttore sottile le cui spire sono concatenate con l'anello stesso vicinissime tra di loro o giacenti ciascuna su un piano passante per l'asse della figura (di rivoluzione) di esso. La figura mostra schematicamente la disposizione delle spire adottata da Riccardo Felici¹ il quale nei suoi classici lavori illustrò la grande importanza del solenoide neutro. Tale disposizione permette di soddisfare con l'approssimazione che si desidera sia la condizione ora detta, sia l'altra che una linea chiusa concatenata con l'anello non sia nemmeno una volta concatenata con il circuito elettrico, che in certe esperienze è richiesta. Del resto se il filo è molto sottile e le spire sono molto serrate fra loro, l'approssimazione delle formule che seguono è assai buona, anche senza che si ricorra a tale artificio.

15 Per i calcoli non è qui opportuno separare la parte elettrica dalla geometrica. Indichiamo con i l'intensità della corrente e con n il numero delle spire. Il campo \mathbf{H} è nullo in tutto lo spazio esterno alla regione anulare; infatti, per qualunque punto di esso è, per ovvie ragioni di simmetria, nulla la somma algebrica degli angoli solidi sotto cui sono viste le spire, da cui il nome di solenoide neutro.

20 Nello spazio interno le linee di flusso sono (pure per ragioni di simmetria) cerchi aventi tutti per asse l'asse di rivoluzione. Lungo tutte queste linee dello spazio interno il valore della circuitazione di \mathbf{H} è indistintamente $4\pi ni$. L'intensità del campo su ciascun cerchio sarà in funzione del raggio r

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi ni}{2\pi r} = 2 \frac{ni}{r} .$$

25 Un'integrazione estesa all'area della sezione dell'anello serve a calcolare il flusso. Nel caso che la sezione sia rettangolare di altezza h compresa tra i valori del raggio r_1 ed r_2 , si ottiene $\varphi(\mathbf{B}) = 2\mu ni h \log_e \frac{r_2}{r_1}$ onde il coefficiente d'induzione mutua con un altro circuito di qualsiasi forma, concatenato m volte con l'anello, risulta $\mathfrak{M} = 2\mu n m h \log_e \frac{r_2}{r_1}$ e il coefficiente di autoinduzione

30 $\mathfrak{L} = 2\mu n^2 m h \log_e \frac{r_2}{r_1} .$

14) Solenoide sottile.

Se la sezione dell'anello ha dimensioni molto piccole in direzione perpendicolare all'asse di rivoluzione, si può per r prendere un valore unico: allora, ponendo

35 $Mi = 2\pi r i_1$, indicando con i_1 l'intensità complessiva di corrente per unità di lunghezza, si può scrivere semplicemente $\mathbf{H} = 4\pi r i_1$ $\mathbf{B} = 4\pi \mu r i_1$.

Osserviamo che, dato il rapido decremento del campo corrispondente a una singola spira con la distanza del punto considerato da questa, il campo in ogni punto interno è quasi esclusivamente dovuto alle spire vicine. Ne segue che, in via di approssi-

¹ Riccardo Felici, 1819-1902, studiò a Pisa dal 1839, docente di fisica dal 1859 e rettore della stessa Università dal 1870 al 1882.

mazione, non è nemmeno necessario, per la validità di queste ultime formule, che le sezioni trasversali siano uguali tra loro su tutta la lunghezza del solenoide, che i_1 abbia un valore costante; la sezione e il valore di i_1 possono anche variare purché le variazioni siano apprezzabili solo per le posizioni poste a distanze tale tra loro che rispetto ad esse siano molto piccole le dimensioni trasversali. Insomma questa formula si può considerare come espressione della legge limite generale del campo interno per solenoidi infinitamente sottili.

D'altra parte il campo all'esterno (sebbene non sia rigorosamente nullo altro che per ragioni di simmetria nel caso considerato prima) pure in ogni caso tende ad annullarsi, coll'assottigliamento del solenoide, da per tutto, salvo che in prossimità degli estremi, se esistono: il valore limite di una qualunque circuitazione concatenata con k spire è per H e B rispettivamente $4\pi k i_1$, $\mu 4\pi k i_1$; ad essa porta un contributo apprezzabile solo la porzione interna del percorso.

15) Solenoide dritto uniforme.

Può avere la figura di cilindro con sezione retta circolare e non circolare oppure di prisma. L'avvolgimento sarà formato da spire strettamente ravvicinate giacenti in piano perpendicolare alla generatrice uniformemente distribuita su tutta la lunghezza. Se le dimensioni trasversali non sono trascurabili rispetto alla lunghezza, se cioè la figura non si approssima a quella di un filo o di un nastro sottile, le formule

$H = 4\pi k i_1$; $B = \mu 4\pi k i_1$ non possono dare il valore dell'intensità dei campi nell'interno che con grossolana approssimazione, tanto più grossolana quanto più il punto considerato è vicino agli estremi. Solo nella parte mediana di un solenoide alquanto allungato il campo è approssimativamente uniforme con le linee di flusso parallele alle generatrici.

Vogliamo ora supporre che la figura del solenoide abbia un asse di simmetria parallelo alle sue generatrici (come, per es., un cilindro circolare o ellittico, o un prisma avente per sezione normale un poligono regolare o una losanga o un rettangolo); ebbene per il principio di simmetria lungo tale asse decorrerà una linea di flusso la quale, naturalmente, si estenderà illimitatamente nello spazio esterno; in altri termini per tutti i punti di questa retta il campo avrà la direzione di questa, il verso sarà concorde per tutti i punti e sarà collegato al verso della circolazione della corrente con la solita regola. Per tali punti è anche facile ricavare dalle leggi generali e i campi circuitali la giusta espressione di B_0 (onde discende subito quella di B). A tal fine stabiliamo sull'asse medesimo un sistema di ascisse x con origine in un punto qualsiasi e con verso connesso con quello positivo della circolazione nel modo indicato dalla figura e consideriamo il contributo dato al potenziale $V(\mathbf{B}_0)$ dalla porzione anulare di estensione dx dato dal prodotto della costante μ_0 (se lo spazio è vuoto) per $i_1 dx$ e per l'angolo solido $\omega(x)$ sotto cui essa porzione anulare è vista dal punto P considerato; dunque sarà

$$dV = \mu_0 \omega(x) i_1 dx .$$

Precisiamo ora come deve intendersi la funzione $\omega(x)$ conformemente a quanto è stato esposto sui potenziali polidromi: i suoi valori saranno senz'altro quelli dell'angolo solido sotto cui è visto l'elemento anulare dal punto P quando esso sia positivo; cioè per la figura, per gli elementi giacenti a sinistra del piano perpendicolare all'asse

e passante per P ; invece per quelli situati a destra, per i quali l'angolo solido si presenterebbe come negativo, ci conviene di aggiungere il modulo di polidromia 4π cioè si assume per $\omega(x)$ il valore di 4π diminuito del valore assoluto dell'angolo solido. Così la funzione $\omega(x)$ è liberata dalla discontinuità che presenterebbe al traversamento di quel piano. Indichiamo poi con $\omega'(x)$ la derivata di tale funzione. Al fine di calcolare il valore del campo del punto P , pensiamo che questo si sposti lungo l'asse del tratto infinitesimo ds (positivo se lo spostamento è nel verso delle x) oppure, il che torna lo stesso, che la porzione anulare infinitesima considerata si sposti con tutto il solenoide di altrettanto nel verso opposto, cioè $-ds$.

10 L'incremento della funzione $\omega(x)$ sarà espressa da $d\omega = -\omega'(x)ds$
e quindi quello della precedente espressione risulterà $-\mu i_1 \omega' ds dx$.

L'incremento del potenziale dovuto a tutto il solenoide sarà dunque

$$dV = -\mu_0 \int_{x_1}^{x_2} i_1 \omega' ds dx \quad \text{cioè} \quad -\mu_0 i_1 ds \int_{x_1}^{x_2} \omega' dx$$

e il valore del campo che si otterrà dividendo per $-ds$ risulterà

$$15 \quad B_0 = \mu_0 H = \mu_0 i_1 [\omega(x_2) - \omega(x_1)]$$

Nell'uso di questa formula naturalmente bisogna tener conto per ciascuno dei termini dell'eventuale 4π in esso incluso.

Distinguiamo ora i diversi casi che possono presentarsi a seconda della posizione di P dividendo l'asse x in tre porzioni:

20 I) da $-\infty$ a x_1

II) da x_1 a x_2

III) da x_2 a $+\infty$

e indichiamo in ogni caso con $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ i valori assoluti degli angoli solidi corrispondenti ai valori $x = x_1$, $x = x_2$ rispettivamente.

25 Se P si trova nella posizione I, entrambi gli angoli solidi si presentano negativi, dunque sarà $\omega(x_2) = 4\pi - |\omega_2|$ $\omega(x_1) = 4\pi - |\omega_1|$

$B = \mu_0 H = \mu_0 i_1 (|\omega_1| - |\omega_2|)$ che, essendo $|\omega_1| > |\omega_2|$ ha lo stesso segno di i_1 , cioè positivo (nella figura B verso destra se la corrente circola nel verso della freccia). Al limite, se l'ascissa del punto P diviene x_1 , si ha il valore

$$30 \quad B_2 = \mu_0 H = \mu_0 i_1 (2\pi - |\omega_2|)$$

Se P si trova nella posizione III, entrambi gli angoli solidi si presentano $\omega(x_2) = |\omega_2|$ $\omega(x_1) = |\omega_1|$ e risulta $B = \mu_0 H = \mu_0 i_1 (|\omega_2| - |\omega_1|)$ che, essendo ora $|\omega_2| > |\omega_1|$ ha pure lo stesso segno di i_1 .

Al limite, se l'ascissa di P diviene x_2 si ha il valore $B_2 = \mu_0 H_2 = \mu_0 i_1 (2\pi - |\omega_1|)$ e, per essere questo $|\omega_1|$ uguale allo $|\omega_2|$ del precedente caso limite, risulta

$$35 \quad B_1 = B_2$$

Se P si trova nella posizione II, sarà $\omega(x_2) = 4\pi - \omega_2$ e risulta

$$B = \mu_0 H = \mu_0 i_1 (4\pi - |\omega_2| - |\omega_1|)$$

40 che ai limiti, cioè quando l'ascissa di P divenga x_1 oppure x_2 , dà naturalmente gli stessi valori già trovati. Il segno è ancora quello di i_1 .

Pensiamo ora che il solenoide, mentre resta costante la sezione e il valore di i_1 , divenga infinitamente lungo: ciò può avvenire se si allontana a distanza infinita una sola delle basi, oppure se si allontanano tutte e due da parti opposte. Nel primo caso

dei due angoli solidi espressi in valore assoluto con $|\omega_1|$, $|\omega_2|$, uno svanirà: indicando con ω l'altro, le formule precedenti si ridurranno così

$$B = \mu_0 H = \mu_0 i_1 \omega \quad \text{per i punti dell'asse esterni al solenoide;}$$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 i_1 2\pi \quad \text{per l'intersezione dell'asse con la base rimasta.}$$

5 Nel secondo caso non abbiamo da considerare che i punti interni e troviamo, come era da aspettarsi, $B = \mu_0 H = \mu_0 i_1 4\pi$.

Tutti questi risultati (e ciò è assai interessante) si possono esprimere con una sola formula semplicissima che si ottiene dalla precedente formula generale ponendo

$$\omega(x_2) - \omega(x_1) = \omega \quad \text{e che risulta} \quad B = \mu_0 H = \mu_0 i_1 \omega \quad \text{il cui significato si}$$

10 vede molto chiaramente, se si osserva che esprime in valore assoluto l'angolo solido sotto cui dal punto P si vede tutta la faccia interna della superficie sulla quale sono distribuite uniformemente le spire. Le formule ora ottenute sarebbero rigorose se, invece di un avvolgimento di spire ravvicinate, si trattasse di una lamina infinitamente sottile tesa sulla superficie laterale del cilindro o prisma e percorsa da corrente elettrica uniformemente distribuita nel verso voluto. In tal caso in essa formula i_1 esprime il valore dell'intensità circolante sul tratto unitario che può chiamarsi densità superficiale di corrente. In pratica con avvolgimento di filo sottile ben serrato si assicura un alto grado di approssimazione. L'intensità del campo lungo la linea assiale ha naturalmente un particolare interesse, e per questo ci siamo soffermati a discuterla in modo particolareggiato.

20 Ma qui vogliamo dare anche un cenno sommario sul flusso totale che traversa le sezioni trasversali del solenoide. Tale flusso è dato naturalmente dalla sola componente normale a tali sezioni, il valore della quale ha nei vari punti di ciascuna sezione, valori alquanto diversi dall'intensità del campo assiale. Ma per la sezione mediana di un solenoide, la quale appartiene a un piano di simmetria del campo le cui linee di flusso l'incontreranno normalmente, la componente tangenziale sarà sull'asse; se il solenoide è molto lungo lo stesso accadrà con molta buona approssimazione per tutte le sezioni vicine a quella mediana o piuttosto non vicine agli estremi, di modo che nella regione mediana del solenoide il campo risulterà sensibilmente uniforme, e il flusso traversante tutta la sezione, indicando con a l'area di questa, sarà molto prossimo al valore $4\pi i_1 a$, valore limite per la lunghezza infinita.

30 Qualunque sia la lunghezza del solenoide in confronto delle due dimensioni trasversali, l'intensità normale della sezione mediana risulterà dalla somma dei due termini uguali e corrispondenti ciascuno a una metà del solenoide. Ne segue che il flusso traversante ciascuna delle sezioni estreme e basi di un qualunque solenoide avrà per valore la metà di quello che traversa la sezione mediana di un solenoide di lunghezza doppia, ma con sezione di figura uguale e con lo stesso valore di i_1 . Se il solenoide è molto lungo, il flusso traversante ciascuna delle due sezioni esterne o basi avrà dunque valore molto prossimo a $\frac{1}{2} 4\pi i_1 a = 2\pi i_1 a$.

40

AUTOINDUZIONE

16) Energia intrinseca di una corrente elettrica.

Allo stabilirsi della corrente in un circuito in esso si desta dunque una f.e.m. che, mentre l'intensità della corrente va crescendo, si oppone alla corrente stessa. Nel tempo dt il lavoro elettrico che dovrà compiere l'elettromotore, oltre a quello impegnato nell'effetto Joule o eventualmente in altri effetti calorici o chimici, sarà espresso da $\mathcal{E}idt$ sarà cioè $dW = i\mathcal{E}\frac{di}{dt} = i\mathcal{E}di$.

Il lavoro complessivo si ottiene integrando per tutto il tempo che dura il passaggio dell'intensità dal valore iniziale 0 a quello definitivo che pure indichiamo con i ; e si ottiene $\frac{1}{2}\mathcal{E}i^2$. Questo valore misura l'energia intrinseca di una corrente: conformemente al concetto che ci siamo fatti della corrente come movimento di elettroni, essa si deve considerare come energia cinetica analoga alla forza viva dei corpi in moto.

17) Energia mutua ed energia totale di due correnti.

Consideriamo ora due circuiti non troppo lontani uno dall'altro e pensiamo di stabilire nel primo una corrente di intensità i_1 , ciò importerà l'energia intrinseca $\frac{1}{2}L_1i_1^2$. Mantenendo i_1 costante, stabiliamo nel secondo la corrente i_2 crescente da 0 al valore definitivo. Calcoliamo il lavoro elettrico richiesto per mantenere costante la prima corrente mentre si stabilisce questa seconda. Esso conterà di due termini, il primo $\frac{1}{2}L_2i_2^2$ (energia intrinseca della seconda corrente). L'altro equivarrà al lavoro elettrico effettuato sul primo circuito per mantenere costante i_1 vincendo la f.e.m. che in esso si produce per effetto della seconda corrente. Indichiamo con M_{12} il coefficiente d'induzione mutua del secondo circuito sul primo, in questo il valore della f.e.m. indotta sarà $E_1 = -M_{12}\frac{di_2}{dt}$ e per l'energia corrispondente, infine, avremo il valore $M_{12}\int i_1\frac{di_2}{dt}dt = M_{12}i_1i_2$.

Complessivamente l'energia nei due circuiti risulterà:

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 + M_{12}i_1i_2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2.$$

Ma noi potremo pensare di stabilire prima la corrente i_2 nel secondo circuito e poi la i_1 nel primo. Ne risulterà allora per l'energia totale l'espressione

$$\frac{1}{2}L_2i_2^2 + M_{21}i_2i_1 + \frac{1}{2}L_1i_1^2.$$

È da escludere però come un assurdo fisico che queste due espressioni abbiano valore diverso e da ciò segue che dovrà essere $M_{21} = M_{12}$ e, a parole, il coefficiente d'induzione del secondo circuito sul primo è uguale a quello del primo sul secondo. Noi lo indicheremo con M . L'espressione $\frac{1}{2}L_2i_2^2 + M_{21}i_2i_1 + \frac{1}{2}L_1i_1^2$ appunto perché esprime una energia non può assumere valori negativi.

Dividiamo per i_2^2 e poniamo $x = \frac{i_1}{i_2}$. L'equazione $\frac{1}{2}x^2 + Mx + \frac{1}{2}L_2 = 0$

Non potrà avere radici reali e distinte; il suo discriminante sarà dunque essenzialmente negativo, cioè sarà $M \leq \sqrt{L_1L_2}$ ed osserviamo che, cambiando in uno dei due circuiti il verso (convenzionale) della corrente positiva, cambia il segno di M ; questa relazione va dunque intesa per i valori assoluti. Matematicamente potremo anche

considerare come ammissibile il caso di unica radice con $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Questo è manifestamente quello limite, dal punto di vista fisico, in cui i due circuiti avessero lo stesso percorso di modo che tutto il flusso dell'uno fosse concatenato con l'altro. In tal caso sarebbe anche $L_1 = L_2$ e quindi l'espressione dell'energia

$$5 \quad \frac{1}{2}L(i_1^2 + i_2^2) + Mi_1 i_2 \quad \text{che sarebbe nulla se fosse } i_1 = -i_2 \quad \text{cioè se le due correnti circolassero nei due versi. Invero l'espressione dell'energia si annulla per}$$

$$x = -\frac{L}{2L} = -1 \quad \text{cioè quando sia } \frac{i_1}{i_2} = -1 \quad .$$

18) Variazioni dell'energia elettrodinamica per movimenti dei circuiti.

10 a) Energia intrinseca.

Supponiamo che l'induttività dell'ambiente rimanga costante. Allora il coefficiente di autoinduzione cambierà solo per deformazioni del circuito. Se rimanesse costante l'intensità i della corrente, avremo per deformazioni infinitesime $dW_L = i^2 dL$ e per deformazioni finite $W_{L_2} - W_{L_1} = i^2(L_2 - L_1)$.

15 L'incremento dell'energia sarà positivo quando è positivo l'incremento del coefficiente di autoinduzione. Per es. due fili andata e ritorno assai prossimi fra loro, quando questi pur senza allungarsi si allontanano formando un'ampia maglia.

b) Energia mutua di due conduttori.

Avremo: $dW_m = i_1 i_2 dm$ $W_{m_2} - W_{m_1} = i_1 i_2 (m_2 - m_1)$.

20 L'energia aumenta per es. se due maglie parallele percorse da correnti concordi si avvicinano, diminuisce se si allontanano.

?) Lavoro meccanico. Azioni elettrodinamiche.

25 Calcoliamo ora il lavoro elettrico eseguito dall'elettromotore o dai due elettromotori per mantenere costante l'intensità della corrente o delle due correnti nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 in cui dura il movimento compensando gli effetti d'induzione che tendono a produrre variazioni d'intensità.

Nel caso a) avremo $\int_{t_1}^{t_2} -Eidt$, ma $E = -i \frac{dL}{dt}$

onde $\int_{t_1}^{t_2} i^2 \frac{dL}{dt} dt = i^2(L_2 - L_1)$.

30 Nel caso b) avremo per il circuito 1 il termine $\int_{t_1}^{t_2} -E_1 i_1 dt$ che,

essendo $E_1 = -i_1 \frac{dM}{dt}$, risulta $\int_{t_1}^{t_2} i_1 i_2 \frac{dM}{dt} dt = i_1 i_2 (M_2 - M_1)$

e per il circuito 2 l'altro termine $\int_{t_1}^{t_2} i_1 i_2 \frac{dM}{dt} dt = i_1 i_2 (M_2 - M_1)$ onde complessivamente l'aumento dell'energia elettrodinamica risulterà

$$2i_1 i_2 (M_2 - M_1) = 2(W_{m_2} - W_{m_1}) \quad .$$

35 Analogamente si possono trattare i casi con un numero maggiore di circuiti.

In ogni caso risulta che il lavoro eseguito dagli elettromotori che mantengono costante l'intensità della corrente, è uguale al doppio dell'aumento dell'energia elettrodinamica; e ciò vale, si capisce, in valore assoluto e segno.

Che l'aumento dell'energia elettrodinamica sia somministrato dagli elettromotori era naturale aspettarselo; ma quell'altrettanta energia che questi forniscono in più, in che cosa si trasforma? Quanto all'effetto Joule, supponiamo al solito che sia considerato a parte. Siccome questa spesa di energia avviene durante il movimento e a causa di essa, il concetto che subito si presenta è che essa vada impegnata in un lavoro meccanico; il che implica che tra conduttori percorsi da corrente si esercitano speciali forze: queste sono dette *azioni elettrodinamiche*.

Tale previsione è perfettamente plausibile, secondo l'ordine del nostro discorso; ma, come sempre nella fisica, attende conferma dall'esperienza.

Storicamente la cosa procedette in modo diverso, anzi inverso: prima A. M. Ampère scoperse con l'esperienza le azioni elettrodinamiche e ne stabilì le leggi, dopo Michele Faraday scoperse i fenomeni di induzione che Neumann¹ riconnesse con le azioni elettrodinamiche e per tale via ne determinò le leggi; ma queste furono dimostrate sperimentalmente in modo rigoroso solo più tardi da R. Felici² (leggi delle azioni elettrodinamiche).

Qui esse possono esser dimostrate ragionando su quanto precede (il che vale a dire, in certo senso, invertendo il procedimento di Neumann) ma valendoci anche di un altro semplice esperimento. Uguagliamo dunque il lavoro meccanico a metà del lavoro elettrico speso dall'elettromotore o dagli elettromotori, cioè in grandezza e segno all'aumento dell'energia elettrodinamica, e osserviamo che questo è espresso anche dal prodotto dell'intensità della corrente circolante nel filo che si sposta per l'aumento del flusso del vettore \mathbf{B} ad esso concatenato; onde per uno spostamento virtuale infinitesimo esso risulterà espresso da $id(\Phi)$ qualunque sia l'origine di questo flusso.

Il lavoro, per un tratto l di circuito soggetto ad uno spostamento infinitesimo traslatorio ds sarà prodotto dall'insieme delle forze, le quali equivarranno, come è noto, ad un'unica forza e ad un'unica coppia (risultante dei momenti).

Il seguente esperimento può servire a dimostrare che per un tratto rettilineo in un campo uniforme simmetrico intorno a un asse passante per il punto di mezzo di esso tratto, la risultante dei momenti è nulla.

?) Esperimento.

In un avvolgimento circolare, anche con molte spire concordi, è mantenuta una corrente costante: il campo $[\mathbf{B}]$ sarà simmetrico intorno all'asse del cerchio. Il tratto rettilineo l formato da filo metallico è girevole intorno al suo punto di mezzo che si trova sull'asse del cerchio; i suoi estremi ricevono la corrente da due pozzetti alquanto estesi contenenti mercurio. Inviando attraverso a esso una corrente anche molto intensa, si osserva che esso non si mette a ruotare, il che mostra elettricamente che la risultante dei momenti della forza a esso applicata è nulla. Ciò varrà *a fortiori* nel caso di un campo uniforme e quindi anche per un tratto dl infinitesimo, cioè tale che nell'areola percorsa nello spostamento virtuale, il valore del campo si possa ritenere costante. Il flusso per tale areola sarà dato da

$$d\Phi = ds \wedge dl \times \mathbf{B} = dl \wedge \mathbf{B} \times ds$$

¹ Franz Hernst Neumann, 1798-1895, fisico e matematico tedesco.

² Riccardo Felici, 1819-1902, fisico italiano, fu docente di fisica presso l'Università di Pisa di cui fu anche Rettore.

e, indicando con f la forza agente sull'elemento dl , quando esso è percorso dalla corrente i , il cui verso positivo concordi col verso di dl , potremo scrivere l'equazione vettoriale $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ la quale deve valere qualunque sia $d\mathbf{s}$: onde dovrà essere $\mathbf{f} = i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$ che esprime appunto la legge elementare dell'azione del campo $[\mathbf{B}]$ sull'elemento dl . Ricordando ora che il campo prodotto in un

punto da una corrente i percorrente un circuito è dato da $\mathbf{B} = \mu i \oint \frac{d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}_n}{r^2}$

dove dl è ora l'elemento lineare del filo che produce la corrente, \mathbf{r}_n il versore del raggio vettore r dall'elemento al punto dello spazio considerato. Indicando coll'indice 1 gli enti spettanti al circuito che produce il campo e con l'indice 2 quelli spettanti al circuito soggetto all'azioni elettrodinamiche, risulterà

$\mathbf{f} = i_1 i_2 d\mathbf{l}_2 \wedge \int_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{r}_n}{r^2}$ quindi il valore di f si può considerare come l'integrale esteso al circuito l di un'azione elementare data dall'espressione $i_1 i_2 d\mathbf{l}_2 \wedge \frac{(d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{r}_n)}{r^2}$.

Abbiamo detto *può*, non *deve* perché ad essa si potrebbe aggiungere un termine tale che si annullasse nell'integrazione lungo un circuito chiuso.

?) Osservazione.

La forza indicata da questa legge elementare è diversa da quella indicata dalla legge elementare di Ampère, perché questa è sempre diretta secondo la congiungente dei due elementi, mentre la nostra non soddisfa tale condizione in generale. Ciò non significa che accettare le presente teoria (e come rifiutarla?) equivalga a dichiarare errata quella di Ampère che egli espose nella celebre memoria *La theorie des actions électrodinamiques deduite uniquement de l'experience*, la quale costituisce uno dei più insigni capolavori della fisica.

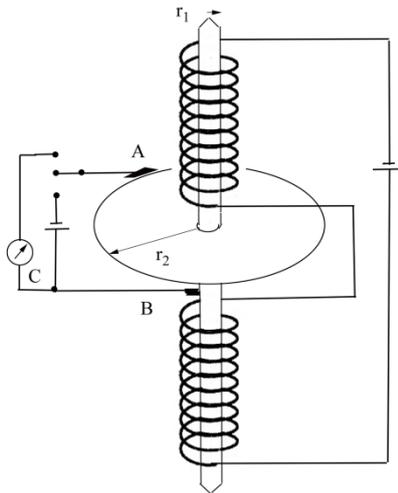
A questo proposito osserviamo che Ampère introdusse fin da principio l'ipotesi che l'azione elementare si esercitasse lungo la congiungente i due elementi: l'intensità dell'azione, attrattiva o repulsiva, doveva, in conseguenza di tale ipotesi, oltre ad essere proporzionale all'intensità e alla lunghezza dei due elementi, risultare funzione della distanza e dei tre angoli che determinano l'orientazione di uno dei tre elementi rispetto all'altro.

La forma di tale funzione Ampère determinò fondandosi su quattro esperimenti eseguiti con circuiti filiformi rigidi che presentavano quattro casi di riduzione a zero degli sforzi complessivi: infatti a quel tempo non era possibile una misura precisa della corrente né il mantenerla costante. Siccome l'interazione complessiva tra i due circuiti, calcolata dalla legge elementare, implica una doppia integrazione sulle due linee chiuse, così la legge Amperiana è vera nel senso che sono vere le leggi integrali che da esse si deducono.

D'altra parte la legge elementare in se stessa non ha senso reale: se dal caso di conduttori filiformi si passa a quello di conduttori estesi a due o tre dimensioni, il problema naturalmente si complica: per quello che riguarda il calcolo del campo \mathbf{B} sappiamo già che esso è fornito dalle leggi generali dei campi circuitali, che si ottengono assimilando ogni strato di flusso infinitesimo della corrente ad un anello vorticoso sottile di intensità infinitesima, ed integrando su tutta la sezione trasversale del

conduttore; quanto al conduttore che si pensa come sottoposto alle azioni elettrodinamiche, una considerazione analoga ci dà in generale l'espressione della forza agente sopra ogni elemento di volume. Così a parte le complicazioni e le difficoltà caso per caso, il problema elettrodinamico è esaurito e sono stabiliti i dati per il problema meccanico il quale prende vari aspetti secondo che il sistema sia rigido o deformabile.

Questo dal punto di vista matematico, cioè come generalizzazione della legge che è stata stabilita sull'ipotesi che le azioni si esercitino sopra un conduttore filiforme. Ma dal punto di vista fisico tale generalizzazione non è, almeno per ora giustificata: perché nel caso del conduttore filiforme la linea percorsa dalla corrente è determinata da questo, e solo uno spostamento del filo può riportare una variazione del flusso concatenato; ma per conduttori estesi trasversalmente si può pensare che i filetti di corrente si spostino senza spostamento del conduttore e viceversa. Manca infine a questo punto della trattazione, la base stessa su cui è stata per ora fondata: e quindi la possibilità di una previsione certa degli effetti. Questo punto importante verrà ora chiarito valendosi di un esempio assai semplice e, del resto, assai noto.



24) Disco di Faraday.

Un disco metallico di raggio r_2 può ruotare intorno al suo asse essendo portato da un perno di raggio r_1 ; su questo e sul contorno del disco sono leggermente appoggiate due spazzole metalliche AB congiunte ai fili conduttori (fissi) che completano il circuito ACB . Il disco si trova in un campo $[B]$ perpendicolare al suo piano, il quale può essere prodotto da un solenoide cilindrico ad esso coassiale e che noi, per semplicità, dapprima supporremo uniforme su tutta la linea del disco stesso.

30 a) Primo esperimento.

Nel circuito tra le spazzole è inserito un galvanometro in C , al disco è impresso un moto rotatorio con velocità angolare. Si produrrà una corrente indotta? Se il disco fosse diviso in sottili settori con un sistema di tagli dal centro alla periferia (linee tratteggiate nella figura) quello che abbiamo già stabilito permetterebbe una previsione sicura: consideriamo infatti uno dei settori sottili la cui estremità periferica faccia contatto colla spazzola B , e notiamo che in un tempuscolo dt essa descriverebbe un'area $\frac{1}{2}\omega(r_2^2 - r_1^2)dt$ attraversata dal flusso $d\phi = B \frac{1}{2}\omega(r_2^2 - r_1^2)dt$ e tale valore avrebbe la variazione del flusso concatenato con il circuito $ACBA$ (ABCA) onde la f.e.m. con il valore assoluto $E = -\frac{d\phi}{dt} = B \frac{1}{2}\omega(r_1^2 - r_2^2)$

40 e la corrente $i = \frac{1}{2}B \frac{\omega(r_1^2 - r_2^2)}{R}$ (R indica al solito la resistenza del circuito); il verso si può prevedere con la regola ora enunciata. Tale corrente risulterebbe con-

tinua perché quando uno dei settori perde il contatto con la spazzola, un altro subentra. Ma il disco non è diviso in settori, esso è intero e quindi questo ragionamento manca di fondamento sicuro: invero pensando ad una qualunque linea congiungente A con B , e completato il circuito da B per C fino ad A non si può poi pensare che il flusso con esso concatenato vari per effetto della rotazione del materiale conduttore costituente il disco il quale non trascina con sé A e B . Non abbiamo quindi elementi sufficienti per una previsione sicura.

b) Secondo esperimento.

Il disco non è ora sollecitato meccanicamente, ma lasciato libero di ruotare e, mediante un elettromotore inserito nel tratto ACB , è inviata una corrente d'intensità i che va per il disco stesso all'altra spazzola. Il disco sarà sollecitato a ruotare? Potrà prodursi così un lavoro meccanico? Se il disco fosse sezionato, come sopra è detto, la previsione sarebbe certa; esso dovrebbe ruotare nel verso indicato dalle nostre regole e fornire una potenza meccanica $W = B \frac{1}{2} \omega (r_2^2 - r_1^2) i$ equivalente alla potenza elettrica Ei essendo ancora $E = B \frac{1}{2} \omega (r_2^2 - r_1^2)$ la f.e.m. che la rotazione genera con verso opposto alla corrente. Ma il disco è integro e quindi il flusso di \mathbf{B} concatenato complessivamente con le linee della corrente circolante nel circuito $ACBA$ rimane costante nel tempo, perché tali linee di corrente manterranno una distribuzione costante e fissa tra A e B , almeno durante una rotazione uniforme; anche se si possa pensare che tale distribuzione risulti alquanto diversa da quella che si ha nel disco in quiete. Non si trova perciò in ciò che abbiamo acquisito la base per una previsione certa, sia dell'effetto d'induzione (1° esperimento), sia dell'effetto meccanico (2° esperimento).

D'altra parte il principio della conservazione dell'energia esclude che uno degli esperimenti possa dare risultato positivo e l'altro negativo, gli effetti saranno presenti entrambi o mancheranno.

I lettore non ignora che tutti e due gli effetti si presentano con valori corrispondenti anche quantitativamente ai risultati dei calcoli ora fatti. Ma in conclusione, nelle leggi che sono state stabilite in precedenza, noi non possiamo avere una base sufficiente per una previsione sicura di questi risultati, cosicché l'induzione elettrodinamica e le azioni elettrodinamiche ponderomotrici non sono ancora chiarite nel caso dei conduttori estesi in due o tre dimensioni. Tutto potrà essere chiarito adottando la concezione realistica della corrente elettrica quale insieme di moto di cariche elementari elettriche, secondo la quale concezione, come abbiamo accennato, anche il problema delle leggi elementari muta profondamente aspetto.

25) Campo prodotto da una carica elettrica in moto.

Considerando dunque la corrente elettrica come moto di cariche elettriche è facile trasformare le leggi Laplaciane $\mathbf{h} = i \frac{d\mathbf{s} \wedge \mathbf{r}_n}{r^2}$ $\mathbf{b} = \mu i \frac{d\mathbf{s} \wedge \mathbf{r}_n}{r^2}$ in modo da ottenere le leggi del campo prodotto da una carica puntiforme in moto.

Cominciamo da uno schema ideale semplice; pensiamo che lungo il filo conduttore si muovano innumerevoli cariche elettriche, per ora tutte dello stesso segno e distribuite uniformemente; sia v la velocità comune a tutte e Q la quantità dell'elettricità a cui esse ammontano per unità di lunghezza. $Q_1 ds = q$ sarà la quantità di elettricità che ad ogni istante si trova nel tratto ds e che nel tempuscolo dt , essendo $\frac{ds}{dt} = v$, esce da esso per essere sostituita da una carica uguale. Avremo

$i = Q_1 \frac{ds}{dt} = Q_1 v$ e quindi ancora, (ma con altro proposito) per il tratto ds

$ids = vQ_1 ds = vq$ Questa relazione scalare, se si tiene conto dell'orientazione, dà manifestamente luogo a una corrispondente relazione vettoriale $ids = qv$, onde

sostituendo nelle precedenti si ottiene $h = q \frac{v \wedge r_n}{r^2}$ $b = \mu q \frac{v \wedge r_n}{r^2}$.

26) Azione meccanica del campo sopra una carica puntiforme in moto.

La stessa sostituzione permette di passare dalla legge $\mathbf{f} = ids \wedge \mathbf{A} \mathbf{B}$ all'altra $\mathbf{f} = qv \wedge \mathbf{A} \mathbf{B}$ la quale rappresenta il risultato cercato.

27) Azioni elettrodinamiche di cariche puntiformi in moto.

Dalla combinazione delle due leggi ora trovate, si giunge immediatamente alle espressioni delle forze che agiscono rispettivamente su ciascuna delle due cariche puntiformi in moto. Indichiamo con q_1, q_2 le misure delle due cariche, con v_1, v_2 , rispettivamente i vettori velocità, con b_{12}, b_{21} i valori vettoriali del campo prodotto da q_1 nel luogo occupato all'istante da q_2 , infine con f_{12} la forza che q_1 esercita su q_2 e con f_{21} quella che q_2 esercita su q_1 , otteniamo

$$\mathbf{f}_{12} = q_2 \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{b}_{12} = \mu q_1 q_2 \frac{\mathbf{v}_2 \wedge [\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{r}_u(1,2)]}{r^2} \quad \mathbf{f}_{21} = q_1 \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{b}_{21} = \mu q_2 q_1 \frac{\mathbf{v}_1 \wedge [\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{r}_u(2,1)]}{r^2}$$

(avendo indicato con $\mathbf{r}_u(1,2)$ e $\mathbf{r}_u(2,1)$ i due versori opposti da q_1 a q_2 e viceversa) le quali sono manifestamente conformi a una stessa legge elementare delle azioni elettrodinamiche tra elementi di fili. Ma ora non può avere luogo l'indeterminazione che è stata sopra considerata per la legge esprimente l'interazione tra due tratti infinitesimi appartenenti a due circuiti filiformi, la quale era relativa alla legge elementare, ma scompariva nell'integrazione estesa agli interi circuiti; qui si tratta dell'interazione tra due corpi puntiformi isolati dotati di cariche elettriche e quindi idealmente la legge potrebbe essere sottoposta a una verifica sperimentale, la quale, se anche non pare praticamente attuabile, è pensabile. La legge ora indicata non è destinata a una doppia integrazione, quindi o è vera o è errata. Essa è risultata dalla combinazione di due; quella esprimente l'azione del campo su una carica elettrica in moto, la quale ha avuto varie conferme sperimentali; quella di Laplace che è una delle leggi elementari che danno per integrazione estesa a un circuito filiforme, la legge integrale del campo vero. Se invece della legge di Laplace, ne adottassimo un'altra, diversa per un termine che dia integrale nullo per qualunque circuito chiuso, la nostra legge elementare dovrebbe essere mutata.

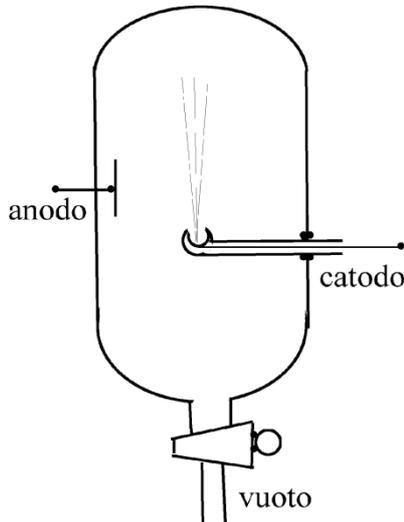
Allo stato attuale della scienza non vi è nessuna ragione per fare ciò e la sua forma che unisce in modo molto semplice i dati essenziali del problema, la rende altamente verosimile.

A prima vista può parere che si presenti una grande difficoltà ad accettarla in ciò che non si accorda col principio di azione e reazione, se il sistema meccanico si pensa consistente nei soli due corpi puntiformi. Ma come sarà mostrato nella seconda parte, tale limitazione non è ammissibile, perché i principi generali della meccanica valgono includendo nel sistema anche la radiazione, la quale non può mancare nel caso dei campi elettrici e magnetici variabili col tempo, nel quale manifestamente rientra il caso presente.

28) Esperimenti sull'azione del campo magnetico sui raggi catodici.

Per illustrare anche in lezione le conseguenze della legge $\mathbf{f} = q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ servono bene i seguenti esperimenti che, secondo la tecnica indicata da Villard¹ rendono ben visibili le figure presentate dai raggi catodici nel campo magnetico, cioè le traiettorie di elettroni in moto libero. Tale buona visibilità è data dalla viva luminescenza di colore celeste, che i raggi producono in seno a ossigeno, si capisce, rarefatto.

Il pallone di vetro *PP* si vuota mediante la tubatura *T* e, chiuso il rubinetto *R*,



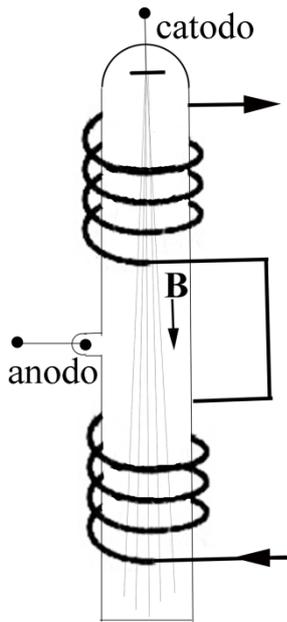
si riempie con l'ossigeno il quale viene prodotto scaldando moderatamente l'ossido di argento contenuto in *D*. È bene ripetere più volte tale operazione perché il gas sia puro. I conduttori di una buona macchina elettrostatica sono connessi con l'anodo *A* e col catodo *C* il quale è inguainato a un cannello di vetro terminante verso il mezzo del pallone con un piccolo bulbo munito di un foro laterale, verso il quale il catodo presenta una faccetta piana. In queste condizioni, con opportuno grado di rarefazione, il campo elettrico nel pallone (eccettuata la vicinanza del catodo) e agli effetti trascurabile: In mancanza di campo magnetico, si osserva un sottile pannello di raggi catodici, che esce dal foro del bulbo catodico e con la piccola mac-

chia luminescente che produce sulla parte di vetro. Il campo magnetico è prodotto da un avvolgimento a molte spire nel quale si manda una corrente regolabile. Si può pure variare la distribuzione geometrica del campo, mutando forma e dimensioni dell'avvolgimento e variare l'orientazione del pennello rispetto al campo stesso. Sotto l'azione del campo magnetico il pennello catodico non permane rettilineo, salvo i caso in cui esso decorra lungo una linea di flusso rettilineo quale è quella giacente lungo l'asse di simmetria dell'avvolgimento che produce il campo, nel qual caso è sempre nullo il prodotto vettoriale $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = 0$. In ogni caso, la forza essendo normale alla traiettoria, il moto permane uniforme, ma, nel caso generale, non rettilineo. Il valore vettoriale dell'accelerazione \mathbf{a} , indicando con e la carica, con m la massa dell'e-

lettrone e con \mathbf{v} la velocità, risulta $\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}}{m} = \frac{\mathbf{F}}{m}$.

La traiettoria dunque nel caso generico sarà una curva gobba la cui normale principale sarà punto per punto ortogonale al campo. Se allora si considera la superficie for-

¹ Paul Ulrich Villard, 1860-1934, fisico e chimico francese.



mata da linee di flusso sulla quale la traiettoria giace, si riconosce che tale normale principale sarà punto per punto normale ad essa superfici; la traiettoria sarà dunque una sua geodetica. Se, come ad es., in una disposizione delle parti quale è rappresentata nella figura, tale superficie ha la forma svasata, di rivoluzione, la figura svasata del percorso dei raggi catodici si potrà imitare avvolgendo e tirando una cordicella sopra un imbuto di simile forma. Il raggio di curvatura del sottile pennello catodico risulta facilmente dalla formula generale di cinematica che la lega

alla velocità e alla accelerazione centripeta $\rho = \frac{v^2}{a}$. Ponendo al luogo di a il modulo del vettore dato dalla formula precedente, cioè $a = \frac{evB\text{sen}\theta}{m}$ dove θ è l'angolo che la tangente delle linee fa, punto per punto, con la direzione del campo, mentre v rimane su tutta la linea costante perché manca un'accelerazione tangenziale. Ne risulta $\rho = \frac{m}{e} \frac{v}{B\text{sen}\theta}$ la

quale mostra che la curvatura $\frac{1}{\rho}$ sarà minore per elettroni più veloci e quando i loro moto è più inclinato sulla direzione del campo, maggiore per elettroni più lenti e moventisi in direzione più prossima a quella del campo. Ciò vale luogo per luogo in quanto i valori di B e di $\text{sen}\theta$ variano in generale da un punto all'altro, mentre m ed anche v restano costanti.

Non meno interesse ha la considerazione della curvatura di una sezione giacente sulla superficie ortogonale alle linee di flusso; scomponendo v nelle due componenti in tale direzione e in quella del campo, che sono rispettivamente $v\text{sen}\theta$ e $v\text{cos}\theta$, e osservando che questa seconda non conta per il prodotto vettoriale e che nell'intorno del punto considerato il moto della proiezione dell'elettrone sopra l'arcata perpendicolare alle linee di flusso avrà il raggio di curvatura di questo, cioè

$$\rho' = \frac{v^2\text{sen}^2\theta}{a} \quad \text{onde} \quad \rho' = \frac{m}{e} \frac{v\text{sen}\theta}{B} .$$

Questa ci dice che a parità di velocità quanto minore è $\text{sen}\theta$ tanto maggiore sarà la curvatura, che cioè l'elettrone avrà minore tendenza ad allontanarsi dalla linea di flusso sulla quale via via si trova.

Ora avviene che per l'effetto delle collisioni si liberano dalle molecole del gas altri elettroni con velocità relativamente minore, oltre a produrre luminescenza, di questi buona parte muove secondo le linee decorrenti quasi come linee di flusso, in tutti e due i versi. Tali elettroni secondari rendono un po' più grossolanamente visibile la figura dell'ampio tubo di flusso in cui si avvolge il primario pennello catodico; l'esperienza acquista con ciò grande evidenza. Ciò basta al nostro fine e non è qui il caso di diffondersi sui molti e svariati esperimenti fatti su questo argomento dal Villard, dal Righi¹ e da altri.

¹ Augusto Righi, 1850-1920, fisico e politico italiano.

Vogliamo invece osservare che nel caso di un campo uniforme il percorso del pennello sottile catodico assume la figura di una ellisse e, al limite, di un cerchio, se è inizialmente ortogonale al campo. Ma per osservare la forma circolare, non è necessario il campo uniforme, essa si può osservare anche disponendo ai due lati del pallone due avvolgimenti uguali e coassiali, disponendo il catodo in modo che la traiettoria giaccia nel piano di simmetria avendo il centro (almeno approssimativamente) nel punto in cui il tal piano è incontrato dall'asse dei due avvolgimenti, che è asse di simmetria del campo.

Si deve anche osservare che in pratica il pennello catodico non è costituito da elettroni tutti animati dalla stessa velocità, sibbene da velocità diverse tra loro, che però, se la macchina elettrica funziona regolarmente, sono comprese entro un valore minimo e uno massimo poco diversi tra loro. In conseguenza di ciò il pennello risulta per effetto del campo un po' diffuso; nel caso particolare per ultimo considerato, non si ha un unico cerchio, ma una figura formata da infiniti cerchi di diametro un poco diversi, tutti tangenti tra loro nel punto dove si trova il catodo.

26) Considerazioni sull'interazione tra due cariche elettriche in moto: velocità critica.

Le due forze elettrodinamiche le cui espressioni sono date dalle ultime formule del § 24, essendo rispettivamente, perpendicolari alla velocità dell'oggetto in cui sono applicate, non saranno in generale dirette secondo la congiungente; ciò potrà avvenire per una di esse o per entrambe in casi particolari. Singolare interesse presenta il caso che due cariche q_1 e q_2 si muovano nel vuoto con una comune velocità v perpendicolare al segmento congiungente r . In tal caso le due forze risultano uguali, opposte e dirette secondo r col valore $\frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{r^2}$, attrattive se le due cariche hanno lo stesso segno, repulsive se il segno è opposto. Il contrario avviene per l'interazione coulombiana il cui valore è $\epsilon_0^{-1} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ e risulta ripulsiva per segni uguali, attrattiva per segni opposti delle cariche. Prevarrà l'azione elettrostatica se $\epsilon_0^{-1} > \mu_0 v^2$, cioè $v < \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Prevarrà l'elettrodinamica se è $\epsilon_0^{-1} < \mu_0 v^2$ cioè $v > \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Si avrà esattamente neutralizzazione se è $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Ebbene poniamo $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ e il lettore, pensando che la distinzione dei casi è decisa dall'essere v minore oppure maggiore di c giudicherà naturale che la velocità che abbia questo valore sia dichiarata velocità critica e riterrà importante il problema: *determinarne il valore*.

Le considerazioni che seguono accresceranno l'interesse del problema. È noto che nei sistemi di misure elettrostatiche ed elettromagnetiche, si pone rispettivamente $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$ e che tali posizioni permettono di ridurre le unità fondamentali a solo tre: cm, g, secondo. Nel sistema elettrostatico sarà allora $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$ nell'elettromagnetico $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}$. Ciò presenta il valore di c come numero che interviene in vario modo nei ragguagli tra le misure elettrostatiche ed elettrodinamiche delle grandezze elettriche di qualsiasi specie. E questo appunto è l'aspetto in cui il problema della determinazione di c si presenta nelle comuni trattazioni della elettrologia. E

si comprende subito, siccome tal valore non dipende che dalle unità di lunghezza e di tempo, non occorre per trovarlo risalire ai valori di ϵ_0 e μ_0 in un sistema di misure a quattro unità; invero assai prima della proposta di riforma metrica di G. Giorgi, varie e accuratissime determinazioni del valore di c sono state fatte confrontando gli effetti elettrostatici ed elettrodinamici di una stessa carica elettrica. Il valore che ne è risultato è di $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

E dovremo concludere che la velocità comune alle due cariche moventisi di conserva nel vuoto influisce sulla loro interazione al punto che se esse superano tale valore la loro interazione si muta da repulsiva in attrattiva, o viceversa. Questa conclusione, se si confronta con i canoni fondamentali della meccanica di Galileo¹, si mostra gravemente paradossale. Invero il *principio di relatività meccanica*, che egli illustra eloquentemente in un celebre passo nel dialogo dei massimi sistemi, nega valore obbiettivo alla velocità, se non in quanto si sia assunto un determinato oggetto che serva di riferimento; ma come si può trovare nello spazio vuoto nel caso ora considerato un riferimento tale che non sia arbitrario e la cui scelta non ci consenta di dare a v il valore che più ci talenta?

E potremo noi allora pensare che le due cariche si attirino o si respingano, secondo che a noi piace più pensare l'una o l'altra cosa?

L'interesse ideale del problema aumenta ancora per il fatto che la velocità critica coincide con la velocità di propagazione della luce nel vuoto, la quale coincidenza s'inquadra nella teoria del Maxwell, ma si presentano gravi difficoltà in relazione col *principio di relatività*.

Ciò portò, verso l'inizio di questo secolo, a una crisi del pensiero scientifico, la quale investiva e la Meccanica e l'Ottica, che la teoria di Maxwell aveva idealmente ridotto a elettrodinamica. Come tale crisi si risolve con la teoria della relatività di Einstein, sarà esposto nell'ultimo.

Intanto osserviamo che, siccome la velocità critica è enormemente superiori a tutte e le velocità che si realizzano negli esperimenti meccanici, così il problema, per quanto gradissimo sia il suo interesse ideale per gli esperimenti del genere di quelli finora descritti, è di portata del tutto trascurabile: finché il rapporto $\frac{v^2}{c^2}$ è trascurabile rispetto all'unità, la interazione elettrodinamica è inapprezzabile in confronto a quella elettrostatica. Ciò pone un'altra domanda che a prima giunta può parere imbarazzante: come avviene che le azioni elettrodinamiche non siano sopraffatte da quelle elettrostatiche, in modo da rimanere inavvertite? O, in altre parole, come è stato possibile eseguire gli esperimenti del genere di quelli fin qui esposti? La risposta non è

¹ Galileo Galilei, 1564-1642, fisico e astronomo italiano.

difficile: la ragione di ciò sta nella neutralizzazione delle azioni elettrostatiche, come ora vedremo.

27) Azioni elettrodinamiche di cariche elettriche dei due segni, frammiste.

5 I vettori $\mathbf{h} = \frac{q\mathbf{v}\wedge\mathbf{r}_u}{r^2}$ $\mathbf{b} = \mu \frac{q\mathbf{v}\wedge\mathbf{r}_u}{r^2}$ e il vettore $\mathbf{f} = q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ che esprime l'azione del campo su una carica in moto si cambiano negli opposti, se si inverte la velocità o se si inverte il segno della carica; cioè restano invariati se si invertono entrambi. Cosicché nessun effetto elettrodinamico prodotto o risentito da una corrente elettrica potrà indicare se essa consiste nel moto di cariche elettriche positive in un certo verso oppure di negative in verso opposto o, infine, se risulta dall'una e dall'altra cosa insieme. Ciò può essere deciso solo per altra via. Per esempio nel caso dei raggi catodici, la carica che questi comunicano ad un conduttore cavo accerta che si tratta di cariche negative moventesi nel verso opposto a quello convenzionale della corrente elettrica che essi costituiscono.

15 Per conservare alle formule la piena generalità, consideriamo la corrente come moto simultaneo di cariche elettriche di segno opposto e potremo scrivere l'espressione del vettore densità di corrente nella seguente forma $\mathbf{id} = q\mathbf{v} = \rho^+\mathbf{v}^+ + \rho^-\mathbf{v}^-$ nella quale ρ^+ e ρ^- esprimono la densità dell'elettricità rispettivamente positiva e negativa, \mathbf{v}^+ e \mathbf{v}^- le rispettive velocità medie vettoriali delle singole cariche elementari. Le leggi laplaciane elementari si scriveranno allora colle formule

$$20 \quad \mathbf{h} = \frac{(\rho^+\mathbf{v}^+ + \rho^-\mathbf{v}^-)}{r^2} \wedge \mathbf{r}_{1u} d\tau \quad \mathbf{b} = \mu \frac{(\rho^+\mathbf{v}^+ + \rho^-\mathbf{v}^-)}{r^2} \wedge \mathbf{r}_{1u} d\tau$$

ed esprimeranno i contributi dei due campi \mathbf{H} e \mathbf{B} corrispondenti all'elemento di volume $d\tau$. Ovvero potremo anche scrivere $\text{rot}\mathbf{H} = (\rho^+\mathbf{v}^+ + \rho^-\mathbf{v}^-)4\pi$
 $\text{rot}\mathbf{B} = \mu(\rho^+\mathbf{v}^+ + \rho^-\mathbf{v}^-)4\pi$ a condizione che si tratti di un circuito chiuso in
 25 modo che il campo del vettore $(\rho^+\mathbf{v}^+ + \rho^-\mathbf{v}^-)$ risulti solenoidale: su questa condizione ritorneremo a suo tempo, e sarà argomento di grande importanza.

E osserviamo che i vettori ora considerati possono avere valori grandi anche con piccoli valori della velocità perché tutti i corpi contengono ingenti quantità di elettricità, positiva e negativa, e la corrente elettrica consiste in uno scorrimento, anche assai lento, di tali cariche.

30 Il caso degli elettroliti è, per questo rispetto, il meglio conosciuto: orbene dagli esperimenti di Hittorf¹, di Kohlrausch² e di altri sappiamo che in essi la corrente risulta da una lenta migrazione di ioni positivi e negativi in verso opposto e con velocità diverse tra loro. Qualcosa di non molto diverso avviene in gas ionizzati di non
 35 troppo piccola densità, salvo che le velocità sono assai maggiori e il numero degli ioni minori.

Nei metalli si ritiene che si tratti principalmente ed esclusivamente di elettroni negativi mobilissimi, sicché il primo termine è quasi sempre nullo; il secondo assumerà valori assai notevoli nonostante la piccolezza di v , per l'ingente valore di ρ^- ;
 40 cosicché nelle esperienze del genere di quelle di Ampère le azioni elettrodinamiche

¹ Johann Wilhelm Hittorf, 1824-1914, fisico tedesco.

² Frederich Wilhelm Kohlrausch, 1840-1910, fisico tedesco.

risultano assai notevoli, ed in confronto ad esse le elettrostatiche, dovute alle sole cariche distribuite alla superficie dei fili, che in ragione delle piccole differenze di potenziale sono esigue, risultano (nonostante l'alto valore della velocità critica) addirittura trascurabili. Del resto esse si possono anche, in esperimenti, più accurati, eliminare del tutto con opportuni schermi. In tutti questi casi il moto delle singole cariche è perturbato da frequenti urti contro tutte le particelle che costituiscono la compagine del corpo conduttore; il cammino medio libero è in conseguenza assai breve, ciò deve ammettersi, perché possano valere le leggi di Ohm. Solo nel caso che abbiamo raccolto sotto la denominazione di correnti di proiezione lo spazio è libero del tutto o quasi.

Nel caso delle correnti in corpi isolanti, cioè di correnti di spostamento, le cose si complicano necessariamente con la variazione del campo e di ciò non è questo il luogo di trattare. Stabiliti questi principi, riprendiamo in considerazione le azioni elettrodinamiche per i conduttori non filiformi.

28) Forza elettromotrice in conduttori in moto come risultante di azioni elettrodinamiche sulle cariche trascinate.

La legge $\mathbf{f} = q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ mostra che una carica dotata di velocità \mathbf{v} nel campo $[\mathbf{B}]$ è sollecitata a deviare dalla sua naturale traiettoria. Il moto delle cariche nell'interno di un conduttore sarà dunque perturbato dal campo $[\mathbf{B}]$; ma finché si tratta di naturali moti disordinati, non essendovi per le velocità nessuna direzione privilegiata, non vi sarà nessun effetto tale da manifestare una forza elettromotrice. Ciò avverrà invece se il conduttore è in moto perché allora alle velocità dei moti disordinati delle cariche si aggiungerà una velocità uguale per tutto il luogo per luogo, cioè quella spettante al moto del corpo. Le cariche elettriche saranno per effetto di essa sollecitate come se fossero soggette a un campo elettrico, il cui valore avesse luogo per luogo il valore $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ essendo appunto \mathbf{v} la velocità della corrispondente porzione del conduttore. Noi vogliamo ora qui riservare il nome di campo elettrico \mathbf{E} a quello elettrostatico, cioè agente sulle cariche elettriche indipendentemente dal loro movimento: per cariche in moto in generale ad esso si sovrapporrà questo nuovo campo, sì che esse saranno sollecitate dal campo risultante dei due campi, cioè dal campo risultante $\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$. Bisogna distinguere due casi.

I) Il campo $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ sia lamellare.

In tal caso esso per parte sua tenderà a produrre spostamenti di cariche positive in un verso, negative in verso opposto entro il volume e alla superficie del conduttore; i quali spostamenti si arresteranno quando il campo coulombiano \mathbf{E} prodotto dagli eccessi di cariche dell'uno dell'altro segno raggiunga un valore tale che il campo risultante si annulli. Ciò avverrà quando in ogni parte del conduttore il valore della densità di questi eccessi di cariche volumici e superficiali risultino uguali rispettivamente a $-\text{div}\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$. Infatti allora il campo $\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ risulterà lamellare e solenoidale e, in assenza di altre cause, per il teorema del par. (essendo soddisfatta la condizione di evanescenza all'infinito, anzi, meglio, per essere il corpo conduttore di estensione finita) risulterà nullo.

Ciò si capisce avverrà dopo un certo tempo di assestamento che, se anche teoricamente infinito, sarà in pratica generalmente molto breve.

II) Il campo $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ non è lamellare.

In tal caso sarà impossibile che esso venga neutralizzato da un campo coulombiano, che è lamellare. Il campo risultante produrrà delle circolazioni durevoli di cariche elettriche nell'interno del corpo conduttore. È il fenomeno notissimo sotto il nome di correnti di Foucault¹. Il lettore non ignora che le correnti indotte in seno a corpi estesi secondo due o tre dimensioni sono state oggetto di molte e importanti ricerche, tra le quali le classiche di C. Matteucci² e di R. Felici. Ma la trattazione in esteso di questo argomento non rientra nel campo che l'autore si è assunto scrivendo questo libro.

??) Ancora sul disco di Faraday.

La previsione del risultato dei due esperimenti che si eseguono con questo apparecchio, non presenta oramai nessuna difficoltà.

I) Esperimento.

Il campo $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, come è facile riconoscere, risulta lamellare, esso ha la direzione radiale con verso indicato dalla solita regola; il modulo, per la distanza r dall'asse, ha il valore $r\omega B$. Esso provoca la formazione di due eccessi di cariche con segno opposto, uno verso l'asse e uno verso la periferia. Se il disco è isolato (e manca cioè la connessione esterna fissa tra le spazzole), tali eccessi producono un campo coulombiano, che entro il disco neutralizza l'effetto d'induzione. Ma se tale connessione è stabilita, il campo non è più lamellare in tutto il conduttore. Allora

$$\omega B \int_{R_1}^{R_2} r dr = \frac{1}{2} \omega B (R_2^2 - R_1^2) \quad \text{valore assoluto di ogni circuitazione lungo}$$

ogni linea che percorra l'anello dall'una all'altra spazzola e si chiude attraverso il circuito esterno, il quale essendo fisso, porta ad essa un contributo nullo: tale è dunque il valore della forza elettromotrice d'induzione della quale si misurano gli effetti. Il verso è conforme alle solite regole.

35) II esperimento.

Dopo quello che abbiamo detto è chiaro che sul disco agirà un momento meccanico che si calcola facilmente integrando il valore infinitesimo

$\mathbf{r} \wedge (\rho^+ \mathbf{v}^+ + \rho^- \mathbf{v}^-) \wedge \mathbf{B} d\tau$ spettante all'elemento di volume $d\tau$ che dista dall'asse di r . Cominciamo con osservare che solo le componenti radiali v_r^+ e v_r^- daranno contributi al momento meccanico essendo ortogonali a \mathbf{B} e all'asse. Considerando allora il disco diviso in anelli cilindrici di spessore dr e raggio r , avremo

$B \int_{R_1}^{R_2} r dr \int_{ar} (\rho^+ \mathbf{v}^+ + \rho^- \mathbf{v}^-) da$, ma l'interale di area rappresenta la intensità della corrente che con lo stesso valore, traversa tutti questi anelli; infine per il momento $\frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) i B$.

¹ Jean Bernard Léon Foucault, 1819-1868, fisico francese.

² Carlo Matteucci, 1811-1868, fisico, fisiologo e politico italiano.

I risultati concordano dunque perfettamente con quelli già indicati, ma allora non ben giustificati. Il disco di Faraday¹ costituisce il caso più semplice di macchine dinamo-eletttriche ed elettrodinamiche. Ma esso è anche fecondo d'importanti applicazioni metrologiche.

5

31) Applicazioni metrologiche del disco di Faraday.

Mostriamo una disposizione che in passato ha servito a determinare in misura assoluta elettromagnetica la resistenza elettrica di un conduttore, ciò anche come fu detto, ha servito alla determinazione dell'Ohm, quando era stato definito come

10 $10^9(\text{u.e.m.})$, ciò beninteso avendo posto $\mu_0 = 1$.

E mostriamo come può servire a determinare il valore di μ_0 quando sia assunta come quarta unità fondamentale quella di resistenza o un'altra unità di natura elettrica, in modo che la resistenza risulti determinata.

15 Il disco ruota nell'interno di un grande solenoide cilindrico nel quale è mantenuta una corrente d'intensità costante (e indichiamone con i il valore. Che del resto verrà eliminato dal calcolo). In serie con il solenoide è inserita tale resistenza R tra due derivazioni che vanno alle spazzole del disco con l'inclusione di un galvanometro. Il verso di rotazione e quello della corrente sono combinati in modo che la corrente nel galvanometro si annulli per un conveniente valore della velocità angolare ω che viene ricercata e accuratamente misurata. Indichiamo ancora con E la f.e.m. così derivata. Potremo scrivere per i valori assoluti $Ri = E$ ma è $E = \mu G \omega i$ essendo G un coefficiente puramente geometrico il cui valore si ricava da misurazioni fatte sul solenoide e sul disco, mediante calcoli, dei quali abbiamo indicato i principi fondamentali e qualche processo approssimativo che, per quanto laboriosi, possono essere condotti col grado di precisione che si desidera. Il risultato generale del metodo si ottiene eliminando i dalle precedenti formule e si riassume nella $R = \mu G \omega$ che, se l'esperimento fosse fatto nel vuoto, si ridurrebbe a $R = \mu_0 G \omega$.

25 In pratica l'esperienza si fa nell'aria atmosferica, e si corregge tenendo conto del valore del rapporto $\mu_p = \frac{\mu}{\mu_0}$ che si ricava da esperienze di confronto tra coefficienti di induzione, o anche con altri esperimenti.

30 È manifesto che, usando il sistema elettromagnetico per lo spazio vuoto, la formula si riduce a $R = G_0 \omega$ la quale serve per la misura assoluta della resistenza nel sistema assoluto elettromagnetico e quindi per la determinazione dello ohm. Invece, adottando un sistema a quattro unità, si scrive $\mu_0 = \frac{R}{\omega G}$ che, se la quarta unità è quella di resistenza, può servire a determinare μ_0 .

35 Per passare poi alla misura i dell'intensità di corrente o a quella q della quantità di elettricità, come quella che si presenta la più sbrigativa, è quella di ricorrere alla legge di Joule, da cui si ricava facilmente $i^2 = \frac{JQ}{Rt}$ $q^2 = \frac{JQt}{R}$ essendo J l'equivalente dinamico della caloria. Ma, se non ci si vuol servire di quest'ultimo dato (che non si possiede con alto grado di precisione), si può ricorrere, una volta noto μ_0 , alla misura di un'interazione elettrodinamica tra due avvolgimenti formanti una

40

¹ Michael Faraday, 1791-1867, chimico e fisico inglese.

configurazione geometrica ben determinata, costituente cioè un *elettrodinamometro* assoluto. Ma vi sono anche altre vie: noi però ci limitiamo a questi brevi cenni generali, non senza avvertire che molti e svariati esperimenti sono stati eseguiti con grande cura, cosicché, già utilizzando il ricco insieme dei risultati già ottenuti, è stato possibile a G. Giorgi di computare un ragguglio assai preciso tra le misure del suo sistema e quella del sistema C.G.S. e di quello internazionale.

32) Momento elettrodinamico di una spira percorsa da corrente.

Consideriamo per semplicità una spira piana di area a . Il contorno è percorso da una corrente d'intensità i . Connettiamo il verso positivo del contorno col verso positivo della normale, in modo che guardando in questo verso quello si presenti come orario, e consideriamo il vettore area \mathbf{a} . Supponiamo che la maglia si trovi in un campo \mathbf{B} uniforme, e cerchiamo quale è l'azione meccanica su di essa.

Per risolvere il problema, consideriamo il lavoro corrispondente a uno spostamento infinitesimo virtuale il quale sappiamo che sarà prodotto dall'intensità i per l'incremento del flusso concatenato. Se lo spostamento è traslatorio, tale incremento è nullo; ciò significa che è nulla la risultante delle forze agenti sulle spire. Valutiamo dunque la risultante dei momenti. Supponiamo impresso alla spira uno spostamento rotatorio infinitesimo α , il quale cambierà l'orientazione della normale con la conseguente variazione del vettore area $d\mathbf{a} = \alpha \wedge \mathbf{a}$ onde la variazione del flusso

$\mathbf{B} \cdot \alpha \wedge \mathbf{a}$ che può scriversi $\alpha \mathbf{x} \mathbf{a} \wedge \mathbf{B}$. Indicando con \mathbf{M} il vettore che esprime il momento meccanico risultante, e uguagliando le due espressioni meccanica e elettrodinamica del lavoro, avremo $\alpha \mathbf{x} \mathbf{M} = \alpha \mathbf{x} \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} i$ la quale deve valere qualunque sia α onde risulta $\mathbf{M} = i \mathbf{a} \wedge \mathbf{B}$. Poniamo $\mathfrak{M} = i \mathbf{a}$ (*) e chiamiamo questo vettore *momento elettrodinamico*. Scriveremo dunque anche

$$\mathbf{M} = \mathfrak{M} \wedge \mathbf{B} \quad (**)$$

la quale mostra che la maglia p sollecitata a ruotare in modo da tendere alla orientazione per la quale, guardando nel verso del vettore \mathbf{B} il verso di circolazione della corrente appare orario; per tale orientazione l'energia elettrodinamica è massima. Tale orientazione è dunque quella per la quale, dal punto di vista esclusivamente meccanico, si ha equilibrio stabile; il che può sembrare paradossale a chi ricordi che nella statica l'equilibrio stabile corrisponde all'energia minima anziché massima. Ma, nel caso della statica si tratta di un lavoro potenziale meccanico, mentre nel nostro caso si tratta, ricordiamolo ancora un a volta, di una energia elettrodinamica (cioè essenzialmente cinetica): questa, mentre la spira si avvicina alla condizione di equilibrio meccanico stabile, aumenta a spese dell'energia fornita dall'elettromotore, che mantiene costante la corrente, il quale fornisce inoltre altrettanta energia per il lavoro meccanico.

Se si tratta di una pila, l'energia potenziale a spese della quale si compiono gli effetti è prevalentemente l'energia potenziale chimica in essa contenuta. È detto *prevalentemente*, perché è noto che anche il calore dell'ambiente può portarvi un contributo, secondo la teoria termodinamica di Helmholtz¹.

¹ Hermann Ludwig von Helmholtz, 1821-1894, medico, fisico, filosofo tedesco.

33) Momento elettrodinamico di un circuito elettrico in generale.

Ad un qualunque circuito elettrico si può sempre immaginare sostituito un sufficiente numero di maglie finite o infinitesime piane, tale che la corrente circolante intorno a ciascuna delle interne sia compensata da maglie contigue. Allora la proprietà distributiva del prodotto vettoriale applicata alla formula (**), valida per ciascuna maglia, porta a definire il *momento elettrodinamico totale* del circuito come somma o integrale di quelli delle singole maglie.

34) Solenoido elettrodinamico sottile uniforme.

È un solenoide al quale la corrente i_1 circolante complessivamente intorno all'unità di lunghezza e l'area a della spire sono costanti su tutta la lunghezza. Distinguendo con S e con N gli estremi, con la convenzione che chi guardi dall'esterno l'estremo S veda oraria la circolazione della corrente, il momento sarà espresso da

$$i_1 a \int_S^N ds = i_1 a (S \rightarrow N)$$

Se tale solenoide è sospeso in un campo \mathbf{B} uniforme, l'orientamento che tende ad assumere sarà parallelo e concorde con \mathbf{B} . Se si tratta del campo magnetico terrestre, sia l'unica spira piana con la normale al piano, sia il solenoide sottile e uniforme con la congiungente i suoi estremi polari, possono dunque servire come bussole elettrodinamiche.

35) Energia di una solenoide uniforme sottile in un campo generico $[\mathbf{B}]$.

Ricerchiamo ora il valore dell'energia che a tale solenoide compete in un dato campo, anche non uniforme, cioè la sua energia mutua con la corrente che produce questo campo. Essa sarà data dal prodotto dell'intensità della corrente per il flusso concatenato con le spire, e cioè per ogni tratto ds si ricava $\mathbf{B} \times i_1 a ds$ (essendo, il verso della i positiva e l'orientazione di s dall'estremo S a quello N , connesse dalle solite regole). Onde complessivamente $W = i_1 a \int_S^N \mathbf{B} \times ds$ ma

$$\int_S^N \mathbf{B} \times ds = V_S - V_N \quad \text{onde} \quad W = i_1 a (V_S - V_N) \quad \text{la quale dunque, dal punto di vista geometrico, dipende solo dalla posizione dei due estremi: si avrà lavoro meccanico solo quando questi, o almeno uno di essi si sposti e deformi la linea direttrice. Ciò mette in rilievo l'importanza singolare di questi che chiameremo } \mathbf{P}_N = i_1 a \quad \mathbf{P}_S = i_1 a .$$

Questi numeri sono la misura dell'intensità dei poli.

Conformemente scriveremo $W = P_S V_S + P_N V_N$ e consideriamo lo spostamento ds di uno dei poli: ne consegue un incremento dell'energia cui corrisponderà un uguale lavoro meccanico. Indicando con F la corrispondente forza, avremo

$$\mathbf{F} \times ds = PdV \quad \text{ma} \quad dV = -\text{grad}V \times ds \quad \text{onde} \quad \mathbf{F} \times ds = P \text{grad}V \times ds$$

La quale deve valere indipendentemente da ds . Onde $\mathbf{F} = -P \text{grad}V$ e per i

due poli rispettivamente $F_N = + P_N \text{grad}V = i_1 a (\text{grad}V)_N$

$$F_S = P_S (\text{grad}V) = - i_1 a (\text{grad}V)_S .$$

Il polo P_N è sollecitato nel verso del campo, il polo P_S nel verso opposto; la orientazione di equilibrio meccanico stabile sarà quella per cui il segmento $(S \rightarrow N)$ sia orientato come il campo.

5 Pensando allora a quella che il solenoide assumerà nel campo terrestre il lettore vede la ragione degli indici N e S adottati e delle denominazioni *Polo Nord* e *Polo Sud*. Con ciò è realizzata una *bussola elettrodinamica*. A quest'ultimo risultato siamo giunti direttamente dalla considerazione del momento elettrodinamico del solenoide sottile uniforme.

10 In generale i precedenti risultati servono a calcolare il lavoro meccanico che si fa quando un solenoide sottile si sposti relativamente ad un conduttore percorso da corrente; e quindi determinare le azioni meccaniche di questo conduttore sul solenoide.

15 Ci si presenta ora il problema, che può dirsi, in certo senso, reciproco, cioè quello di calcolare le azioni del solenoide sul conduttore per giungere infine a risolvere l'altro, particolare, ma di speciale interesse, che ha per oggetto le azioni reciproche di due solenoidi sottili. A tal fine cominciamo dal determinare qual è il:

36) Campo prodotto da un solenoide sottile e uniforme.

20 Mostriamo dunque come si ottiene l'espressione (si capisce a meno di una costante) del potenziale in un punto generico P esterno al solenoide, a distanza non infinitesima dagli estremi S e N . Il contributo infinitesimo portato da un tratto infinitesimo sarà $dV = \mu\omega i_1 ds = \mu i_1 a \frac{\cos\theta}{r^2} ds$ essendo θ l'angolo che la retta da esso tratto infinitesimo a P forma con ds . Osserviamo che allora $ds \cos\theta$ risulta uguale all'incremento corrispondente allo spostamento ds lungo il solenoide, della

25 e quindi $V = \int_S^N \mu i_1 a d\left(\frac{1}{r}\right) = \mu i_1 a \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_S}\right)$.

30 L'espressione del potenziale coincide formalmente con quella del potenziale di un campo newtoniano con due regioni di divergenza una positiva e una negativa. In questa espressione il valore di $V = 0$ si avrà al limite per distanza infinita del solenoide, conformemente all'uso comune, e sul piano equidistante dai punti S e N : risultando positivo nel mezzo spazio comprendente N e negativo nel mezzo spazio comprendente S .

35 Sostituendo i valori dati da questa formula nella precedente espressione generale dell'energia, otterremo l'espressione dell'energia mutua di due di tali solenoidi sottili uniformi: naturalmente contrassegneremo con apice le lettere spettanti a uno di essi e indicheremo con $r_{N_1 N_2}$, $r_{N_1 S_2}$, $r_{S_1 S_2}$, $r_{S_1 N_2}$ le quattro distanze tra i quattro poli dei due solenoidi e cioè

$$W = \mu a_1 i_{1,1} a_2 i_{1,2} \left(\frac{1}{r_{N_1 S_2}} - \frac{1}{r_{S_1 S_2}} + \frac{1}{r_{S_1 N_2}} - \frac{1}{r_{N_1 N_2}} \right).$$

40 È quasi superfluo avvertire che questa non è se non un termine dell'energia totale, cioè l'energia mutua, la quale si annulla all'annullarsi di una delle correnti. Se l'intensità delle correnti rimane costante e quindi rimangono costanti $i_{1,1}$, $i_{1,2}$ tale energia varia solo se variano le distanze tra i poli e, precisamente, aumenta al dimi-

nuire di $r_{N_1S_2}$ e $r_{S_1N_2}$, il che importa un lavoro meccanico positivo. Invece diminuisce al diminuire di $r_{N_1N_2}$, $r_{S_1S_2}$. D'altra parte ogni spostamento o anche deformazione dei solenoidi, in cui rimangono fisse le estremità polari, non importa nessuna variazione di energia mutua e quindi nessun lavoro meccanico.

5 La situazione meccanica fra i due solenoidi si riduce dunque all'insieme di quattro forze, tra gli estremi polari, diretta secondo le congiungenti, due attrattive tra i poli eteronimi e due repulsivi tra i poli omonimi. La legge comune di queste forze è data dalla formula $F = \mu \frac{P_1 P_2}{r^2}$ la quale è conforme a quella che esprime la legge scoperta sperimentalmente da Coulomb per poli magnetici, ma non è conforme all'estensione di questa al caso che si tratti di diversi mezzi ambienti, perché in tale estensione l'induttività del mezzo figura a dividere anziché a moltiplicare. In questo punto, di capitale importanza, dovremo tornare in fine del capitolo seguente, che ha per argomento la teoria elettrodinamica del campo magnetico. Invero all'accettare tale teoria sembra a tutta prima che si opponga la diversa legge di dipendenza del mezzo ambiente dalle interazioni tra calamite e tra correnti, ma vedremo come tale difficoltà possa esser superata con considerazioni abbastanza ovvie; le quali però daranno luogo a qualche interessante conseguenza. (v. Cap. V. 1)

CAPITOLO V

TEORIA ELETTRODINAMICA DEL MAGNETISMO

5 Nel 1820 Andrea Maria Ampère, avendo scoperto i fenomeni elettrodinamici,
 come interazioni meccaniche tra fili percorsi da corrente elettrica, affermò che le
 azioni elettrodinamiche erano effetti cioè di correnti circolanti nell'interno dei magne-
 ti, nelle quali correnti egli ritenne che si potesse risolvere ciò che con termine generi-
 co chiamasi magnetismo e tali correnti furono appunto dette correnti di Ampère. Ciò
 10 abbiamo ricordato solo per insistere su questo punto, che egli non presentò questa
 concezione (per usare una termine forense) come ipotesi ma come tesi: non si limitò
 cioè ad osservare che era possibile spiegare, con le correnti interne, ciò che fino ad al-
 lora si era spiegato con le cosiddette masse magnetiche, rimanendo agnostico fra le
 due interpretazioni, ma ritenne delle due vera quella che riduceva un solo principio
 15 tra ordini di fenomeni apparentemente diversi, magnetici, elettromagnetici, elettrodi-
 namici. A ciò fu manifestamente condotto dal carattere unitario della sua mentalità
 (egli in quell'epoca teneva la cattedra di filosofia nella facoltà di lettere della Sorbo-
 na). E filosofo si manifestò più precisamente, nel senso in cui Galileo usò questo no-
 me, quando scrisse ... *gli astronomi filosofi, li quali oltre alla cura del salvare in*
 20 *qualunque modo le apparenze cercano d'investigare come problema massimo e am-*
mirando, la vera costituzione dell'Universo, poiché tal costituzione è, ed è in un tal
modo solo, vero, reale ed impossibile ad esser altrimenti, e per sua grandezza e no-
biltà degno d'essere anteposto ad ogni altra riuscibil quistione da gli ingegni specu-
*lativi*¹ ... Anche questa volta ambedue le concezioni si prestavano a *salvare le appa-*
 25 *renze* allora note: ebbene, come Galileo dei due massimi sistemi aveva ritenuto vero
 quello copernicano, così Ampère delle due concezioni del magnetismo ritenne vera
 quella elettrodinamica; come già le prove sperimentali della tesi sostenuta da Galileo,
 così quella della tesi Amperiana, vennero molto tempo dopo, quasi un secolo dopo.
 Durante quel lungo intervallo di tempo, il quale fu del resto fecondissimo di grandi
 30 sviluppi per l'elettrologia, la concezione Amperiana fu generalmente ricordata nei
 trattati forse più per la celebrità dell'autore, che per una vera importanza che ad esse
 si attribuisce, ma si presentò come ipotesi ammissibile piuttosto che come tesi dimo-
 strabile; ma dette luogo ad una vera e propria teoria elettrodinamica del magnetismo
 la quale inquadrasse tutte le leggi del campo magnetico.

35 La teoria del magnetismo invece si seguì nei trattati di fisica a inquadrare nel
 solito schema newtoniano elaborato da Poisson² e altri, ma ciò forse più per abitudine
 che per convenzione; infine l'idea Amperiana non morì né si sviluppò. Il suo rinnova-
 mento doveva venire da altra parte: verso il principio di questo secolo la teoria di
 P. Langevin³ della proprietà magnetiche dei corpi fu esplicitamente elettrodinamica.

¹ G. Galilei, 1564-1642, scienziato italiano, da una lettera a Marco Velsari, *sulle macchie solari*, del 4-5-1612.

² Siméon-Denis Poisson, 1781-1840, matematico e fisico francese.

³ Paul Langevin, 1872-1946, fisico francese.

Era concetto generale accettare che la magnetizzazione di un corpo consistesse nel prevalente concorde orientamento dei *magneti elementari*, i quali tradizionalmente si pensava che consistessero in bipoli, ossia coppie di masse magnetiche di segno opposto: con Langevin si prese a considerarli come enti elettrodinamici. Langevin
5 mise a base della sua teoria il concetto che un elettrone circolante in un'orbita equivalga a una spira percorsa da corrente, la quale produce un campo magnetico; e da ciò prese le mosse per interpretare il *dia*, il *para*, il *ferro-magnetismo*, in relazione con la costituzione elettronica atomica e molecolare dei corpi.

10 Questa teoria, e altre che la seguirono, sono piuttosto orientate verso la chimica fisica via elettrodinamica di magneti elementare e il suo momento, non ci si curava se nelle teorie fisico-matematiche del campo si seguitasse a trattarlo come bipolo data l'equivalenza dei suoi soggetti.

15 Il compito che qui ci siamo proposti è invece quello di dimostrare come la concezione Amperiana, presa nella sua massima generalità, prescindendo da qualsiasi particolarità attinente alla struttura dei vari corpi, si presenti direttamente, cioè senza riferimento alcuno alla tradizionale teoria, a inquadrare nel modo più logico e naturale, tutti gli enti vettoriali e scalari che servono alla rappresentazione matematica del campo magnetico con le sue leggi, e valga benissimo a interpretare e giustificare i
20 procedimenti sperimentali magnetici ed elettrodinamici.

Noi quindi escludiamo dalle nostre considerazioni le cosiddette masse magnetiche e quel che più moderatamente è detto *magnetismo libero*, e invece consideriamo le *correnti di Ampère*; e per non ingenerare confusione chiameremo *correnti proprie* quelle fin qui considerate, cioè quelle correnti elettriche le quali si manifestano con
25 altri effetti oltre a quello di produrre un campo elettrodinamico, cioè magnetico.

1) Presupposti della teoria elettrodinamica del magnetismo.

Nel cap. III abbiamo mostrato come le proprietà dei corpi isolanti e conduttori si interpretano pensando che essi contengano nel loro interno un grandissimo numero di cariche elettriche elementari di entrambi i segni + e -. Tale concetto, convenientemente completato, può rendere conto, in linea del tutto generale, delle proprietà magnetiche, e quindi servire di base alla teoria elettrodinamica del *magnetismo*. Noi
30 dobbiamo ritenere inoltre che le cariche elettriche elementari contenute nei corpi siano in continua agitazione; ciò è conforme a tutto quello che si fa nella fisica dei corpi; non è dunque un'ipotesi di lavoro, ma un'affermazione che difficilmente si potrebbe
35 mettere in dubbio¹. Vuol dire che quando noi abbiamo parlato di spostamenti e di migrazione, ci siamo riferiti non alla posizione all'istante delle singole cariche, ma alla posizione media intorno alla quale ha luogo questa incessante agitazione. Tale movimento di cariche elettriche sarà secondo le leggi elettrodinamiche già esposte, modificato da un campo magnetico, cioè elettrodinamico, prodotto per esempio da una spira
40 percorsa da una corrente elettrica propria. Tali azioni possono produrre un certo ordine nel movimento se è preventivamente disordinato; cioè dar luogo alle correnti

¹ Per questo nella teoria di questo paragrafo ho usato la parola *presupposto* invece che quella di *ipotesi*: l'etimologia assegna ad esse un medesimo significato, ma l'uso conferisce alla prima un valore più positivo.

di Ampère, le quali alla lor volta aggiungeranno al campo che le ha prodotte un altro campo omogeneo con esso e che con esso si comporrà. Ma può anche avvenire che, qualunque sia la ragione, il movimento sia *ab initio*, anche senza intervento di un campo esteriore, non completamente disordinato, ma vi sia un certo ordinamento che si manifesti in un campo prodotto da un corpo, anche senza intervento di un campo esteriore. Questo sarà il caso che si tratti di un magnete permanente. Fondandosi sopra a queste premesse che, allo stato attuale della scienza, si presentano naturalissime, noi possiamo dunque venire all'interpretazione generale degli enti vettoriali e scalari che rappresentano matematicamente il campo magnetico, e delle leggi generali che li collegano tra di loro. Cominciamo da un caso semplice.

2) Circuito filiforme immerso in un mezzo corporeo omogeneo indefinito.

Supponiamo che inizialmente il mezzo non sia magnetizzato. Ciò significa che i moti di agitazione delle cariche sono così disordinati da non produrre un campo risultante permanente apprezzabile. Pensiamo ora che nel circuito filiforme sia inviata una corrente propria d'intensità i ; in tutto lo spazio circostante si avrà allora un campo vettoriale che diremo *eccitazione magnetica* (la ragione di questa denominazione e delle altre che seguiranno apparirà chiaro dalla esposizione stessa), il quale sarà definito dalla nota legge $\mathbf{H} = \text{gradi}\omega$.

A questo campo sarà associato un altro campo di altra specie che chiameremo di forza *magnetizzante* $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \text{gradi}\omega$, il quale sarebbe il campo definitivo se il circuito filiforme si trovasse nel vuoto; per questo è stato posto l'indice zero.

Il campo \mathbf{B}_0 agirà elettrodinamicamente sulle correnti consistenti nel moto disordinato delle particelle, modificandone l'orientazione e producendovi un certo ordinamento, cosicché dal loro insieme ne potrà risultare un altro campo \mathbf{H}_A omogeneo con \mathbf{H} (l'indice A è posto a denotare che in tale ordinamento consistono appunto le correnti di Ampère le quali producono dunque un campo omogeneo con quello di eccitazione magnetica, cui è alla sua volta associato un campo $\mu_0 \mathbf{H}_A$ omogeneo con \mathbf{B}_0). Cosicché ne risulta infine il campo totale $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{H}_A$ dovuto per il primo termine alla corrente propria e per il secondo alle correnti di Ampère.

Una volta prodottovi un qualche ordinamento nei moti preventivamente disordinati, non è escluso che il campo che ne risulta non abbia aggiunto un suo contributo a quello diretto della corrente primaria aumentando ancora l'ordinamento fino alla definitiva sistemazione in correnti di Ampère. Per ora noi limitiamo le nostre considerazioni al caso il quale si verifica per la maggior parte dei mezzi corporei in cui \mathbf{H}_A risulti *proporzionale* ad \mathbf{H} . Il principio di ragion sufficiente basta a escludere che la direzione di questi due vettori risulti diversa se il mezzo è isotropo: i loro versi daranno concordi od opposti. È anche manifesto che in questo secondo caso \mathbf{H}_A rimarrà in grandezza minore di \mathbf{H} , perché altrimenti l'effetto della corrente propria sarebbe annullato e invertito. Sarà dunque sempre \mathbf{B} concorde con \mathbf{B}_0 , minore o maggiore.

È bene richiamare che \mathbf{B} , come \mathbf{B}_0 e a differenza di \mathbf{H} e \mathbf{H}_A , ha naturalmente, nella nostra concezione elettrodinamica, il carattere di campo di forza in quanto si manifesta e misura con una azione meccanica su una corrente elettrica che serve co

me esploratore; perciò spetterà a \mathbf{B} la denominazione di *forza magnetica* che nella teoria tradizionale è stata data a \mathbf{H} , in quanto viene esplorato e misurato con una ago magnetico, cioè coll'insieme di due cosiddette masse magnetiche, considerate queste come enti fondamentali, il che non è ammissibile dal punto di vista elettrodinamico.

5 In seguito discuteremo esaurientemente questa profonda divergenza concettuale fra le due teorie. Pertanto per \mathbf{H} , campo quale si calcola dall'ente produttore che è la corrente, abbiamo dato, concordemente al Mie¹ e al Sommerfeld², il nome di eccitazione magnetica. Ciò non esclude che per \mathbf{B} si possano mantenere anche la denomi-
10 zione di *induzione*, purché si sottintenda *elettrodinamica*. Infine le due denomina-
zioni corrispondono alle due manifestazioni: azioni elettrodinamiche, produzione di correnti indotte.

Un primo risultato importante è già virtualmente raggiunto; è stato posto il concetto basilare per l'interpretazione del fatto, che sia le azioni elettrodinamiche, sia gli
15 effetti d'induzione risultano rinforzati o indeboliti dal mezzo ambiente corporeo, rispetto al valore che avrebbero, *caeteris paribus*, nello spazio vuoto, la causa di tali effetti consisterà nelle correnti di Ampère che aggiungono un campo proprio, concorde od opposto a quello a quello prodotto dalla corrente primaria.

Per passare a precisare ulteriormente questo punto, cominciamo a trattare della:

20 3) Magnetizzazione.

Finché i movimenti di agitazione delle cariche elementari presenti nel mezzo corporeo erano disordinate, abbiamo detto che esso non era magnetizzato, con ciò era già detto implicitamente che, una volta stabilito l'ordinamento in correnti di Ampère, esso sarà magnetizzato. Ciò implica:

- 25 a) I già detti campi \mathbf{H}_A e $\mu_0\mathbf{H}_A$ da questa prodotti;
b) un momento elettrodinamico cioè magnetico di ciascuna porzione del materiale che costituisce un mezzo ambiente; la grandezza di questo momento per il volume unitario misurerà l'*intensità della magnetizzazione*; essa costituirà il modulo del *vet-*
30 *tore magnetizzazione* la cui orientazione, in armonia con quanto stabilito al Cap. III, coinciderà con quello di \mathbf{H}_A ; cioè nel caso considerato sarà o concorde od opposto rispetto ad \mathbf{H} .

Stabiliamo ora la connessione tra questi due enti e le correnti di Ampère, ma in modo del tutto generale, cioè in modo che *non implichi* il particolare andamento effettivo di queste per i vari mezzi corporei, il che riguarderebbe la teoria chimico-
35 fisica delle proprietà magnetiche dei corpi in rapporto alla loro costituzione molecolare, atomica, elettronica (la quale teoria ormai non può essere che quantistica), ma sibbene il modo che riguardi solo l'effetto globale delle correnti di Ampère per ciascun elemento di volume, inteso come infinitesimo virtuale, cioè evanescente appartenente ad un ordine di grandezza inferiore a quello accessibile alle comuni esperienze, ma
40 superiore a quello molecolare, atomico, elettronico (v.: Preliminari matematici). A tal fine consideriamo dunque per ciascun elemento di volume il momento elettrodinami-

¹ Gustav Adolf Feodor Wilhelm Ludwig Mie, 1869-1957, fisico tedesco.

² Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld, 1868-1951, fisico tedesco.

co, cioè magnetico, risultante da tutte le singole circolazioni e rotazioni di cariche elementari in esso contenute, ricordando che tale momento risultante equivale all'insieme di esse, sia per il campo prodotto all'esterno dell'elemento corporeo stesso, sia per le azioni meccaniche che esso risente da un corpo esteriore.

5 Orbene, tale momento magnetico sarà da noi rappresentato quale è in effetto, cioè quale elettrodinamico, non quindi attribuito a due masse newtoniane fittizie, formanti un bipolo, ma ad una corrente elettrica circolante intorno al piccolo volume considerato, la quale sintetizza e regolarizza tutte le singole correnti di Ampère entro esse esistenti, in un ente globale ad esse omogeneo che chiameremo *correnti di Ampère equivalenti*.

10 Tale processo è comunissimo nella fisica matematica, invero nella meccanica le singole masse molecolari e atomiche si sintetizzano in una massa continua, distribuita con una densità costante o variabile con continuità nell'interno di ciascun corpo; nell'elettrostatica gli accumuli di cariche elettriche elementari discrete con prevalenza
15 dell'uno o dell'altro segno, si sintetizzano in cariche continue, con distribuzione volumica e superficiale dotate di densità pura volumica e superficiale. E d'altra parte anche per il campo elettrico, e per il potenziale si prescinde (quando non si tratti della cosiddetta microfisica) delle minute e pur notevoli irregolarità dovute al carattere discreto delle cariche elementari e si adotta un campo e un potenziale regolarizzati; si
20 noti anche che la fisica atomica assegna differenze di potenziale entro il volume di ciascun atomo valori dell'ordine di alcuni volt, cioè assai maggiori di quelli di cui si tiene conto per valori globali delle comuni teorie e esperienza elettroniche.

Del resto anche nella teoria tradizionale del magnetismo una simile regolarizzazione globale si pensava per le cosiddette masse magnetiche. Il lettore dunque non
25 vedrà niente di strano in questa regolarizzazione della correnti di Ampère in correnti equivalenti e comprenderà che, se un ente globale deve prendere il posto dei singoli casi elementari, è senza alcun dubbio preferibile che esso sia della stessa specie di questi e non di una specie diversa e inesistente, anche come specie.

Ma il vantaggio principale dal punto di vista logico, è quello di presentare in tutti
30 i casi anche, come vedremo, in quello dei magneti permanenti, come naturale e fondamentale il carattere geometrico del campo $[\mathbf{B}]$, cioè di campo solenoidale e rotazionale. L'interpretazione della magnetizzazione mediante le correnti di Ampère equivalenti, s'istituisce facilmente nel caso semplice ora considerato, con che si precisa il concetto di induttività e di suscettività, poi si generalizza e si applica al caso dei
35 mezzi omogenei dei corpi ferromagnetici e dei magneti permanenti.

Consideriamo un tubo di flusso sottile del campo $[\mathbf{H}]$, cioè anche dei campi $[\mathbf{B}_0]$, $[\mathbf{H}_A]$ e $[\mathbf{B}]$ e pensiamo le correnti di Ampère equivalenti come circolanti intorno alle superfici laterali di esso, via via in piani della sezione normale, con una intensità i_A per unità di lunghezza; chiameremo i_A densità equivalente delle correnti
40 di Ampère. Consideriamo un tratto del tubo di flusso della lunghezza dl essendo da l'area della sezione trasversale, il valore scalare del momento elettrodinamico, cioè magnetico di esso sarà $i_A dlda$ e indicando con \mathbf{J} l'intensità di magnetizzazione, tale valore si scriverà anche $\int \mathbf{J} dv$ essendo $dv = dlda$ onde dovrà essere $\mathbf{J}' = i_A$ e, a parole, *la densità equivalente della correnti di Ampère è uguale all'in*

tensità di magnetizzazione; d'altra parte il materiale magnetizzato contenuto nel tubo di flusso è ora assimilato ad un solenoide elettrodinamico sottile, onde la relazione tra H_A e i_A $H_A = 4\pi i_A$ e ne segue $H_A = 4\pi j$ dalla quale uguaglianza scalare si passa naturalmente introducendo il vettore magnetizzazione \mathbf{I} , alla uguaglianza vettoriale $\mathbf{H}_A = 4\pi\mathbf{I}$ onde $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0 4\pi\mathbf{I}$, relazione che, come ora vedremo, ha validità del tutto generale.

Ma, nel caso che ora ci occupa, tutti questi vettori hanno direzione comune e basta considerare le relazioni scalari, cioè scrivere $B = \mu_0 H + \mu_0 4\pi I$. Ora, ricordando $B = \mu H$ e $\mu = \mu_p \mu_0$, ponendo $X_p = \frac{I}{H}$ risulta

$$10 \quad \mu = \mu_0(1 + 4\pi X) \quad \text{e} \quad \mu_p = 1 + 4\pi X.$$

Agli scalari di queste formule attribuiamo segno + o -; conveniamo di assumere + il verso di \mathbf{H} ; B risulterà + e quindi H_A e J avranno segno + o - a seconda che H_A sia cospirante o discordante rispetto ad H .

Avremo due casi.

15 I) Caso diamagnetico.

$$\mu_p < 1 \quad \text{e quindi} \quad X_p < 0$$

II) Caso paramagnetico.

$$\mu_p > 1 \quad \text{e quindi} \quad X_p > 0 \quad \text{Il lettore riconosce facilmente in} \quad \mu = \mu_p \mu_0$$

20 la misura della cosiddetta induttività assoluta (grandezza fisica), in μ_p la cosiddetta *induttività relativa* (numero puro sempre +), in μ_0 la misura della cosiddetta *induttività del vuoto* (grandezza fisica), in X_p (numero puro + o -) la cosiddetta *suscettività relativa*. Egli pure facilmente riconosce le semplificazioni che in tutte le precedenti formule si hanno ponendovi $\mu_0 = 1$ cioè adottando il sistema di misura elettromagnetico.

25

4) Osservazioni sulle nomenclature.

Noi non vogliamo dare soverchia importanza alle parole, in quanto ché la specie dei singoli vettori e scalari sono fissati dagli esperimenti che servono a determinarle, e indicate, ormai in modo universalmente adottato, dalle lettere che rappresentano quegli enti; riterremo anzi inopportuno (almeno in questo trattato) una proposta di riforma della nomenclatura adottata nella tecnica, sia riguardo alla specie che all'unità, per quanto essa, avendo un'origine più storica che logica, presta il fianco a facili e giuste censure. Qui vogliamo solo osservare quale risulta la nomenclatura che ora si presenta come la più opportuna, una volta adottata la concezione elettro-dinamica del magnetismo. Tanto più che essa è nei punti essenziali adottata e approvata dai più autorevoli scrittori (Mie).

Una volta messa da parte, quale ente fondamentale, la cosiddetta massa magnetica, sostituendo con la corrente elettrica come produttrice ed esploratrice del campo magnetico, il carattere di campo di forza spetta come abbiamo detto a B , rivelata dall'azione meccanica della corrente, e non da H che si presenta quale ente matematico intermedio e dipende solo dalla corrente che produce il campo; per tale ragione noi abbiamo per questo vettore tradotta la denominazione del Mie, *magnetische Erregung*, in *eccitazione magnetica*, e per B , già nella mia memoria del 1914, avevo

40

adottato quella di *forza magnetica* che pure fu adottata dal Mie e approvata da Sommerfeld. Così a B_0 che è omogenea con B si conviene perfettamente la denominazione del resto già usata anche in passato, di *forza magnetizzante*, che nella mia memoria citata, nella quale usavo il sistema elettromagnetico di misura, usai per H , in quanto esso vettore, in seguito alla posizione convenzionale $\mu_0 = 1$ si identificava appunto con B_0 , e questa ultima notazione non era usata.

Quanto a μ_0 , secondo il concetto cui è informata la presente trattazione che si rifiuta di considerare lo spazio vuoto come analogo ad un mezzo corporeo, in quanto ché in esso non sono presenti cariche elettriche¹, si considera come una costante fisica universale² cioè la costante della legge delle azioni elettrodinamiche.

5) Induttività e suscettività.

Sono proprietà magnetiche dei materiali dia e paramagnetici e a esprimerle bastano i numeri puri μ_p e X_p e questo è del resto l'uso comune: non vi è quindi ragione di aggiungere all'uno o all'altro di questi nomi l'aggettivo *relativo*. Ciò non vieta di scrivere ancora per comodità $\mu = \mu_0 \mu_p$, ma ricordando che, in sostanza μ non ha altro significato che quello del prodotto di due fattori eterogenei i quali in molte formule (non tutte) si trovano uniti. Il lettore avrà osservato che, mentre la teoria elettrodinamica cambia profondamente le interpretazioni (e quindi conduce ad una

versa nomenclatura), porta a scrivere senza alterazioni le formule tradizionali, salvo una (che d'altra parte è di importanza capitale) la quale è qui scritta

$$B = \mu_0 H + \mu_0 4\pi I \quad \text{mentre tradizionalmente si suole scrivere} \quad B = \mu_0 H + 4\pi I$$

cioè nella nostra figura $\mu_0 I$ in luogo di I .

La diversità è di natura metrica, proviene da ciò, che noi abbiamo misurato il valore del momento (e quindi della magnetizzazione elettrodinamica), cioè delle interazioni (tra correnti, mentre tradizionalmente si misurava magneticamente, cioè dalle misurazioni tra aghi magnetici): le due metriche diversificano per la costante moltiplicativa μ_0 e quindi coincidono se si adotta la posizione $\mu_0 = 1$. Tanto basta per evitare malintesi; l'argomento sarà a suo tempo ripreso per inquadrare nella teoria elettrodinamica quanto di vero contenuto nella tradizionale magnetostatica.

6) Validità generale della relazione tra i vettori del campo.

Riprendiamo in considerazione l'uguaglianza vettoriale $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 4\pi \mathbf{I}$ e osserviamo che essa scompone il vettore del campo di forza \mathbf{B} in due componenti, i quali, nel caso considerato fin qui, sono tra loro proporzionali e paralleli, e entrambi circuitali come \mathbf{B} . Essi rappresentano due contributi al campo di diversa provenienza, l'uno \mathbf{B}_0 , dalla corrente propria, cioè dalla corrente magnetizzante, l'altro dalle correnti di Ampère e osserviamo che questo sarà la somma di tutti gli elementi del tubo di flusso contenente quel punto, ma solo il contributo degli elementi vicini sarà apprezzabile. Diremo: \mathbf{B}_0 rappresenta il contributo esterno, $\mu_0 4\pi \mathbf{I}$ il contributo locale, connesso alla magnetizzazione. Possiamo ora togliere la condizione

¹ Non è affatto il caso di portare in gioco qui le ardite concezioni di Dirac che hanno altre origini e finalità.

² Costante almeno nei limiti di validità delle nostre formule.

che questo vettore sia, come nel caso finora trattato, parallelo e proporzionale a \mathbf{B}_0 : $\mu_0 4\pi \mathbf{I}$ sarà il campo dovuto alle equivalenti correnti di Ampère locali, comunque esse si siano stabilite più o meno in relazione con \mathbf{B}_0 . Questo invece sarà il campo dovuto alle correnti estranee, qualunque origine e natura abbiano, e correnti proprie o anche eventualmente correnti di Ampère, purché esterne o estranee. E, in tale concetto, per ogni punto di una qualunque corpo magnetizzante scriviamo ancora $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 4\pi \mathbf{I}$. Noi penseremo dunque di considerare punto per punto il vettore magnetizzazione \mathbf{I} cioè il campo $[\mathbf{I}]$ che supporremo regolare ed esteso solo al corpo considerato; considereremo quindi un sottilissimo tubo di flusso di questo campo, le correnti di Ampère equivalenti con densità $i_A = I$, il loro campo locale $\mu_0 4\pi \mathbf{I}$.

D'altra parte considereremo il vettore \mathbf{B} ; quello esteriore \mathbf{B}_0 risulterà ora definito come $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} - \mu_0 4\pi \mathbf{I}$ la quale sarà ora da riguardare come la più generale definizione della forza magnetizzante, denominazione ormai adottata e che manterremo, anche se la magnetizzazione non sia un suo diretto e unico effetto, cioè quando essa sia la magnetizzazione di mezzi ferromagnetici.

7) Magnetizzazione in sostanze ferromagnetiche.

Per studiare le variazioni simultanee dei tre vettori \mathbf{B} , \mathbf{B}_0 , \mathbf{H} nei materiali ferromagnetici, sceglieremo una disposizione tale che ciascuno di essi abbia un valore costante in grandezza (essendo d'altra parte nota la direzione) in tutti i punti del campione in studio. Per soddisfare con buona approssimazione la condizione ora indicata, sceglieremo la forma di solenoide sottile neutro sottile: a un sottile anello circolare del materiale che si vuole studiare, è concatenato un avvolgimento di filo sottilissimo in spire strettamente accostate, nel quale s'invierà la corrente magnetizzante, regolandone e misurandone opportunamente l'intensità.

Indichiamo con l la lunghezza perimetrica dell'anello, a l'area (piccola) della sua sezione trasversale (veramente basta che sia piccola la dimensione in senso radiale, la dimensione parallela all'asse dell'anello è indifferente e può servire bene anche un nastro largo piegato a forma cilindrica, N il numero delle spire dell'avvolgimento, i il valore variabile dell'intensità della corrente in questo circolante.

Il valore dell'eccitazione magnetica sarà espresso da $H = \frac{4\pi Ni}{l}$ cui, secondo le solite convenzioni si potrà attribuire un segno concorde con quello di i . La forza magnetizzante avrà il valore $B_0 = \mu_0 H = \mu_0 \frac{4\pi Ni}{l}$ onde sarà

$$B = \mu_0 \left(\frac{4\pi Ni}{l} + 4\pi J \right) \quad \text{dalla quale si ricava} \quad J = \frac{1}{4\pi \mu_0} B - \frac{Ni}{l} = \frac{1}{4\pi \mu_0} \frac{\varphi(B)}{a} - \frac{Ni}{l}$$

$$J = \frac{1}{a 4\pi \mu_0} [\varphi(B) - a B_0] \quad \text{la quale ci potrebbe dare il valore dell'intensità della magnetizzazione, noto il valore di } l, \text{ se si potesse conoscere quello di } B. \text{ Di questo non possiamo conoscere che le differenze corrispondenti ad un brusco passaggio da un uno all'altro stadio, ottenuto variando il valore di } i \text{ e ciò si farà col solito metodo di induzione: un avvolgimento di } m \text{ spire è, in modo e forma qualsiasi, concatenato all'anello e forma con un galvanometro balistico un circuito indotto di resistenza } R \text{ e}$$

sarà $\Delta\varphi = -\frac{QR}{m}$ essendo Q la quantità di elettricità misurata dall'elongazione del galvanometro.

Ma è ben noto che i materiali ferromagnetici possono essere già magnetizzati prima di iniziare i saggi; niente ci autorizza di ritenere inizialmente I e $\varphi(B)$ nulli per $i = 0$. Orbene, si potrà ottenere che sia $J = 0$ mediante la seguente manovra preliminare: si invia nell'avvolgimento una corrente da prima molto intensa che si inverte molte e molte volte diminuendo via via l'intensità per gradi fino ad annullarla. Molto comodo è l'uso di corrente alternata, la cui intensità si faccia, con una opportuna disposizione di resistenza, diminuire lentamente fino a svanire del tutto. Per ragioni di simmetria alla fine non solo il materiale sarà in effetto non magnetizzato, ma non presenterà nessuna diversità nell'attitudine ad essere magnetizzato nell'uno piuttosto che nell'altro senso. Inviando allora la corrente e facendo crescere bruscamente per valori multipli interi di un valore assai piccolo, si otterranno successivi aumenti uguali di B_0 a partire dal valore 0. Le elongazioni del galvanometro ci permetteranno di misurare i successivi aumenti a partire dallo 0 di $\varphi(B)$ e di J . I corrispondenti aumenti di J non risulteranno uguali, ma, dapprima assai piccoli, in seguito molto maggiori, diverranno in seguito sempre più tendenti a divenire infine nulli, mostrando che uno J tende asintoticamente a un valore J_s limite (saturazione magnetica).

Ristabilendo poi in senso inverso la stessa successione di valori i , cioè di B_0 , si ottengono corrispondentemente valori di I decrescenti sì, ma tutti maggiori dei corrispondenti crescenti prima ottenuti; sicché, anche per $i = 0$ cioè $B_0 = 0$, I non si annulla, ma conserva un valore I_r (magnetizzazione residua); per indurre di nuovo $I = 0$, è necessario invertire la corrente e farla crescere finché B_0 assume un valore assoluto B_{0r} detto forza coercitiva.

Quantitativamente i risultati sono assai diversi a seconda del materiale, ma qualitativamente il comportamento ora descritto è comune a tutti i materiali ferromagnetici. Il lettore indovina, se anche non sa già, che si possono variare in infiniti modi gli esperimenti, manovrando a volontà, ma sempre per cambiamenti bruschi di valore, l'intensità della corrente, cioè la forza magnetizzante; si osserva in ogni caso che il valore di I non è in funzione ad un solo valore di B_0 , ma dipende dagli stati precedenti e risulta maggiore se questi erano maggiori, minore se questi erano minori; vi è una generale tendenza della magnetizzazione a mantenersi non molto diversa da quella che era stata prima (isteresi magnetica). Anzi l'influenza degli stati precedenti o, come si suol dire, della storia magnetica, è assai complessa e complicata; cosicché, se si fa variare B_0 da un valore iniziale a uno finale e viceversa, cioè se si compie un ciclo di magnetizzazione, e questo si ripete diverse volte, non si ottengono da principio valori perfettamente concordi, solo dopo aver replicato il trattamento ciclico un numero di volte abbastanza grande per cancellare la cosiddetta *memoria* degli stati precedenti, si ottiene un andamento definitivo.

La figura dà un'idea dell'andamento di un ciclo di magnetizzazione simmetrico, tra due valori opposti prossimi alla saturazione. Tali grafici riescono quantitativamente molto diversi a seconda della natura e dello stato fisico del materiale, ma una trat-

tazione, che non potrebbe essere breve, di questo argomento, per quanto naturale ne sia l'interesse scientifico e più ancora tecnico, non rientra nel compito che ci siamo proposti.

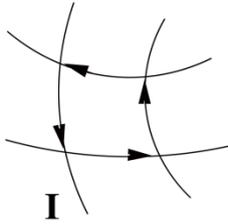
Le formule valgono esattamente per il solenoide neutro per ora considerato, si possono applicare con approssimazione a un solenoide sottile aperto; con approssimazione dico, tanto migliore quanto è più grande la sua lunghezza rispetto alle dimensioni trasversali. Ciò facilita molti esperimenti che non pretendono un alto grado di precisione, perché, preparato una volta per tutte un solenoide elettrodinamico mediante un avvolgimento uniforme su un tubo stretto e lungo, si può infilare in esso via via il campione di materiale ferromagnetico sul quale si vuole sperimentare. Quanto all'induzione diretta dall'elica magnetizzante, o si terrà conto della diversità (ora non trascurabile) tra l'area della sezione di questa e l'area della sezione trasversale del filo in prova, oppure esso potrà essere compensato stabilendo a parte opportunamente un altro accoppiamento induttivo tra i due circuiti in modo che, tolto il materiale ferromagnetico, il coefficiente d'induzione mutua risulti nullo.

Vedremo in seguito come con questa disposizione si possa anche rivelare la magnetizzazione del corpo ferromagnetico, invece che con effetto d'induzione, con l'azione di esso sopra un ago magnetico posto in vicinanza di uno dei suoi estremi. Si suole chiamare *metodo balistico* quello che utilizza gli effetti d'induzione, metodo magnetometrico quest'altro, ora accennato, sul quale torneremo dopo aver trattato in generale dei corpi magnetici limitati da superfici le quali, rispetto ai campi vettoriali, si comportano come superfici di discontinuità.

8) Corpi para o diamagnetici limitati.

Riprendiamo ora in considerazione materiali para e diamagnetici, cioè tali per cui sussista ancora la proporzionalità e parallelismo tra i vettori \mathbf{B}_0 e \mathbf{H}_A cioè tra \mathbf{B} e \mathbf{H} . E cominciamo dal considerare un tal corpo omogeneo, ma non indefinito, anzi separato dallo spazio vuoto circostante per mezzo di una superficie regolare, tutto al finito. È manifesto che a questa superficie terminerà il campo del vettore \mathbf{I} il quale nello spazio interno sarà ancora solenoidale come \mathbf{H} , ma nello spazio esterno sarà nullo. Alla superficie del corpo esisterà dunque una divergenza superficiale di questo vettore: $\text{div}_a \mathbf{I} = -J_n$ essendo J_n la componente normale (interna) del vettore \mathbf{I} assunta positiva se rivolta verso l'esterno. Dovendo essere ovunque $\text{div} \mathbf{B} = 0$ avremo sulla superficie $\text{div}_a \mathbf{H} = -4\pi \text{div}_a \mathbf{I} = 4\pi J_n$ ($H_n^* - H_n = 4\pi J_n$ dove J_n^* è il valore della componente normale all'esterno).

Le porzioni della superficie sulle quali i valori di queste divergenze non sono nulli, saranno dette regioni polari. Queste regioni polari, come vedremo in seguito, non s'identificano esattamente con quelle che si chiamano comunemente regioni polari nell'insegnamento elementare. Ve ne saranno almeno due distinte, l'una con segno positivo, l'altra con segno negativo per $\text{div}_a \mathbf{H}$ e $\text{div}_a \mathbf{I}$; cioè con segno rispettivamente - e + per H . (Complessivamente dovendo, per una qualunque superficie chiusa comprendente nel suo interno tutto il campo, essere nullo il flusso di \mathbf{B} , cioè di \mathbf{B}_0 , ne segue che in ogni caso, la somma algebrica di tutte le divergenze ora dette deve essere nulla, cioè se vi sono solo due regioni polari, saranno uguali in valore as-



soluta le due somme prese su ciascuna di esse). Le regioni polari saranno separate tra loro da linee o zone neutre, delle quali una almeno dovrà essere sempre presente. Per evitare complicazioni, che non presenterebbero alcun interesse, ammettiamo che in tutto il volume interno e sulla superficie del corpo considerato non circolino correnti proprie. Ne segue che sarà entro il corpo $\text{rot}\mathbf{H} = 0$ e alla superficie $\text{rot}_a\mathbf{H} = 0$ e quindi in generale $\text{rot}_a\mathbf{B} = 4\pi\mu_0\text{rot}_a\mathbf{I}$ poiché nell'interno sarà anche $\text{rot}\mathbf{I} = 0$.

In questo caso il campo vettoriale \mathbf{I} risulterà dunque nell'interno del campo solenoidale e lamellare; sulla superficie esso presenterà divergenza superficiale la quale, a meno del fattore 4π (il quale è di pura origine metrologica e potrebbe farsi scomparire con la cosiddetta razionalizzazione delle formule) compensa la divergenza superficiale di \mathbf{H} ; esso presenta anche rotazione superficiale che, pure a meno del fattore 4π , uguaglia il rotazionale superficiale di \mathbf{B} ; la divergenza superficiale si annulla solo sulle linee o zone neutre, ove invece può annullarsi il rotazionale superficiale, il quale si annulla solo se la magnetizzazione incide normalmente sulla superficie. Nella teoria tradizionale il campo di \mathbf{H} , e quindi quello di \mathbf{B}_0 defalcato nella parte proveniente da correnti proprie, si attribuisce alle divergenze superficiali di \mathbf{I} associando ad esse un agente newtoniano fittizio, detto magnetismo libero; la cui densità superficiale σ è connessa con la magnetizzazione dalla relazione

$\sigma = -\text{div}_a\mathbf{J}$. Invece nella teoria elettrodinamica il campo \mathbf{B} , defalcata ancora la parte proveniente da correnti proprie, è attribuito al rotazionale superficiale di \mathbf{I} . La teoria tradizionale ha per fondamento le due relazioni $\text{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{i}$ $\text{div}\mathbf{H} = 4\pi\sigma$, con \mathbf{i} = densità di corrente propria, σ = densità magnetica, le quali formano un sistema di carattere ibrido in conseguenza delle due presupposte cause eterogenee di esistenza del campo. La teoria elettrodinamica ha invece per fondamento l'unica relazione $\text{rot}\mathbf{B} = 4\pi(\mu_0\mathbf{J} + \text{rot}_a\mathbf{j})$ dove \mathbf{J} è la densità di corrente che produce il campo \mathbf{H} il cui carattere omogeneo si rivela chiaramente con le seguenti considerazioni sulla corrente di Ampère; abbiamo già osservato che il campo del vettore \mathbf{I} è, in tutto lo spazio interno al corpo, solenoidale e lamellare; orbene, consideriamo un sottile strato compreso tra due superfici di tal campo; indichiamo con dl la loro distanza (variabile da luogo a luogo), consideriamo ancora questo strato diviso in cellette dai tubi di flusso che lo traversano normalmente: l'intensità della corrente equivalente di Ampère circolante intorno a ciascuna di queste cellette avrà il valore $i_a dl$, valore che risulta costante su tutto lo strato. Le correnti equivalenti di Ampère saranno dunque per ciascuna celletta neutralizzate, negli effetti elettrodinamici, da quelle delle cellette contigue salvo che al contorno del corpo, ove avranno $\text{rot}_a\mathbf{B} = \mu_0 4\pi\mathbf{i}$ (ciò, del resto, discende immediatamente dal carattere lamellare del campo \mathbf{I} che porta per conseguenza $\text{rot}\mathbf{I} = 0$ nell'interno, cioè esclude l'esistenza di correnti di Ampère non neutralizzate da quelle degli elementi contigui nell'interno) nella quale \mathbf{i} è ora un vettore, cosicché infine potremo scrivere $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0 4\pi\text{rot}(\mathbf{i} + \mathbf{I})$ la quale presenta, come unica causa del campo, la corrente elettrica. Vedremo in seguito come questa formula sia senz'altro applicabile, non solo al caso fino a ora considerato, ma del tutto generale.

I) Caso dei corpi para e diamagnetici. Superficie di discontinuità.

Da quanto precede risulta che la superficie del corpo è sede di discontinuità dei campi $[\mathbf{H}]$, $[\mathbf{B}_0]$, $[\mathbf{I}]$ e $[\mathbf{B}]$, e precisamente di divergenza superficiale per i primi tre e di rotazione superficiale per l'altro. La divergenza superficiale importa un salto nella componente normale, mentre la tangenziale resta continua, cosicché nel caso considerato i campi \mathbf{H} e \mathbf{B}_0 risultano in tutta la loro estensione lamellari, e pure lamellare il campo \mathbf{I} nell'interno del corpo e nullo nel circostante spazio vuoto. Il rotazionale superficiale importa discontinuità della componente tangenziale, cosicché il campo \mathbf{B} è non lamellare, ma solenoidale (come sempre) in tutta la sua estensione.

Osserviamo che la continuità del componente tangenziale di \mathbf{H} e \mathbf{B}_0 ha per conseguenza che le tangenti delle loro linee di flusso al limite sono complanari con la normale (I legge della rifrazione delle linee di flusso).

E, contrassegnando con apice i valori limiti all'esterno per distinguerli dai valori limiti all'interno, avremo

$$H'_T - H_T = 0 \quad H'_n - H_n = 4\pi I \quad I'_n = 0$$

$$B'_n - B_n = 0 \quad B'_T - B_T = -\mu_0 4\pi I_T .$$

Indicando con θ e θ' gli angoli che le comuni linee di flusso formano colle normale alla superficie all'interno e all'esterno, sarà

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta'} = \frac{B_T}{B'_T} = \frac{\mu_p \mu_0 H_T}{\mu_0 H'_T} = \mu_p$$

che esprime la nota legge di rifrazione delle linee di flusso magnetiche alla superficie di discontinuità fra un corpo dia e paramagnetico e lo spazio vuoto circostante.

Ricordando che nello spazio vuoto B_0 coincide con B mentre ciò non avviene nell'interno, osserviamo che le discontinuità delle componenti normali di B_0 , e quindi la sua divergenza superficiale, hanno nella teoria elettrodinamica questo solo significato, che passando dall'interno del materiale magnetizzato allo spazio vuoto, cioè da una regione nella quale esistono le correnti di Ampère ad una nella quale esse mancano, viene a mancare la possibilità di attribuire una parte della totale forza magnetica alle locali correnti di Ampère e quindi a mancare uno dei termini della scomposizione del campo e conseguentemente spetta ad un incremento dell'altro termine il mantenere la continuità della componente normale di esso campo di forza; perciò la scissione di tale campo in due termini intrinsecamente omogenei, non rappresenta nella teoria elettrodinamica che un modo nostro di analizzare matematicamente i fatti del campo magnetico.

II) Caso dei corpi ferromagnetici.

Questo caso si tratta con gli stessi principi, ma risulta alquanto più complicato perché manca la proporzionalità e, conseguentemente (salvo il caso or ora considerato del solenoide neutro), in generale manca il parallelismo tra i vettori \mathbf{H} e \mathbf{B} nell'interno del corpo; solo nell'ambiente esterno, dove è nullo \mathbf{I} , sussiste parallelismo e proporzionalità tra \mathbf{B} , che si riduce a \mathbf{B}_0 , e \mathbf{H} . Questo rimane vero, che la superficie del corpo sarà in generale sede di divergenza superficiale dei vettori \mathbf{B}_0 e \mathbf{J} , oppure di \mathbf{I}_e e \mathbf{B} , mentre non sarà mai sede di divergenza superficiale di \mathbf{B} , la cui componente normale sarà sempre continua; d'altra parte \mathbf{H} (e quindi \mathbf{B}) sarà sempre lamellare se mancano correnti proprie.

Ma le formule precedenti non saranno tutte valide che in via di approssimazione più o meno grossolana, finché cioè non ci si allontani dalla proporzionalità ora detta, la quale è necessaria perché si possa parlare di una induttività μ_p come costante specifica del materiale. Per poter prendere in esame qualche cosa di particolare interesse presentiamo le seguenti considerazioni sul campo del vettore \mathbf{I} .

Per i corpi dia o paramagnetici esso risulta privo nell'interno del corpo di divergenza e di rotore, e ciò permetterà di riportare le regioni polari e le correnti equivalenti di Ampère alla superficie; ma ciò non avverrà in generale. Distinguiamo dunque due casi particolari.

3) Magnetizzazione lamellare.

Abbiamo già visto che in questo caso le correnti di Ampère si possono riportare alla superficie laterale del corpo, e possiamo dire anche che in tal caso le correnti di Ampère nell'interno sono *compensate*: il campo \mathbf{B} rimane determinato univocamente quindi dalle correnti proprie se sono presenti tali correnti di Ampère superficiali, e potremo sostituire al corpo magnetizzato una figura geometrica vuota sulla cui superficie circolino correnti proprie di densità superficiale uguale a quella delle correnti di Ampère.

Ma con ciò non è detto che il campo \mathbf{I} nell'interno del corpo sia solenoidale, cioè privo di divergenza, generalmente volumica, la quale sarà compensata di una divergenza di segno opposto del vettore \mathbf{H} , che in tal caso non resterà solenoidale nello spazio interno, né esso né \mathbf{B}_0 . In altri termini diremo che nei corpi ferromagnetici oltre le regioni polari superficiali, vi possono essere regioni polari interne.

4) Magnetizzazione solenoidale.

Ciò è escluso in questo secondo caso, nel quale le regioni polari o sono superficiali, o mancano affatto se si tratta di solenoide neutro. Ma non ne importa la condizione che le correnti equivalenti di Ampère siano compensate, cioè non è escluso che nell'interno del corpo magnetizzato esistano regioni di rotazionale (generalmente volumico) del vettore \mathbf{I} le quali saranno anche regioni di rotazionale del vettore \mathbf{B} .

Secondo quanto abbiamo visto nell'interno dei corpi para e diamagnetici la magnetizzazione sarà sempre lamellare e solenoidale insieme mentre nell'interno dei corpi ferromagnetici potrà esser solenoidale non lamellare, lamellare non solenoidale e anche né lamellare né solenoidale.

Le equazioni generali che legano i vettori del campo potranno scriversi in due modi. Nel primo, usato tradizionalmente, sarà $\text{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{i}$ $\text{div}\mathbf{H} = -4\pi\text{div}\mathbf{I}$. Nel secondo modo, direttamente conforme alla teoria elettrodinamica,

$\text{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_a)$ ove ora \mathbf{i}_a ha carattere vettoriale e precisamente sarà determinata da \mathbf{J} mediante la relazione $\mathbf{i}_a = \text{rot}\mathbf{J}$. La relazione $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J})$ permette di prendere indifferentemente come fondamento o il sistema delle due equazioni tradizionali o l'unica equazione elettrodinamica.

9) Magnete permanente.

Le leggi del campo come prodotto da un magnete permanente discendono come caso particolare ponendo nulla l'intensità delle correnti proprie.

Il campo $[\mathbf{I}]$ è allora da considerarsi come l'unico dato del problema: secondo il modo conforme alla concezione tradizionale da esso ricaveremo la divergenza di \mathbf{H} (che tradizionalmente si attribuisce all'agente newtoniano fittizio detto magnetismo libero) e questa determinerà il campo \mathbf{B}_0 per la relazione tra i vettori. Secondo il nostro concetto elettrodinamico dal campo $[\mathbf{I}]$ si ricaverà direttamente quello di \mathbf{B} tenendo conto che per questo vale sempre la relazione $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mu_0\operatorname{rot}\mathbf{I}$ e la relazione tra i due vettori permetterà di calcolare anche per la parte interna il campo \mathbf{H} e \mathbf{B}_0 , quando ciò possa aver interesse.

Un esempio assai interessante sebbene in pratica non sia esattamente realizzabile, è offerto da un magnete a forma cilindrica in cui la magnetizzazione sia uniforme e parallela all'asse. Cominciamo a trattarlo con il secondo metodo: esso è senz'altro assimilabile al solenoide elettrodinamico studiato al § 9 del Cap. IV. Le leggi allora dimostrate per il campo \mathbf{B} nel caso dello spazio vuoto valgono senz'altro ponendosi $\mathbf{i}_1 = \mathbf{J}$. Le linee di flusso di questo campo escono dalla parte N per rientrare dalla parte S ; alcune traversando senza rifrazione le facce basi che sono regioni polari, altre traversando con rifrazione, dovuta a discontinuità della componente tangenziale, la superficie laterale, specialmente in vicinanza degli estremi. Il flusso che esce dalle basi, se il cilindro è molto allungato, è approssimativamente uguale alla metà di quella che traversa la sezione mediana; se invece il cilindro è poco allungato, è più della metà di questo. Naturalmente nello spazio esterno (vuoto), essendo in ogni luogo

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}$ le linee di flusso di \mathbf{B} coincidono anche con quelle di \mathbf{H} . Da questo andamento si ricava che sarebbe erroneo pensare che le linee di flusso escano solo dalle regioni polari, e che quindi queste siano indicate fedelmente dalle porzioni di superficie alle quali per es. si attacca la limatura di ferro. A determinare il campo \mathbf{H} nell'interno servirà la relazione $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J})$.

Ricordiamo che la direzione di \mathbf{B} è assiale solo (per ragioni di simmetria) nei punti dell'asse e della sezione mediana, invece in vicinanza della superficie laterale le linee saranno inclinate e, maggiormente, in vicinanza degli estremi; ne segue che \mathbf{B} in generale non sarà parallelo a \mathbf{J} e quindi nemmeno ad \mathbf{H} ; d'altra parte il modulo di \mathbf{B} in ogni punto interno sarebbe $4\pi\mu_0\mathbf{J}$ se il magnete fosse infinitamente lungo, invece avrà un valore minore di questo, e la differenza sarà maggiore in valore assoluto, *coeteris paribus*, per magneti più brevi. Ne segue che l'orientazione di \mathbf{B}_0 farà angolo ottuso o piatto con quella di \mathbf{B} e di \mathbf{I} e lo stesso sarà per \mathbf{H} .

Si giunge dunque alla conclusione (paradossale se si vuole) che la forza magnetizzante porta un contributo negativo al flusso ed è rivolta in verso tale da meritare il nome di forza *smagnetizzante*. Il materiale ferromagnetico potrà conservare la sua magnetizzazione soltanto a condizione che tale forza smagnetizzante abbia valore minore della forza coercitiva. Ma è facile prevedere che si potrà ottenere un buon magnete permanente solo a patto di dargli una figura assai allungata; ed è facile anche inferire, da quanto precede, che questa azione smagnetizzante sarà molto notevole in vicinanza degli estremi, cosicché più difficilmente il materiale manterrà fino a questi uniforme la sua magnetizzazione, e ciò produrrà un arretramento più o meno note-

vole delle regioni polari delle facce esterne. Per questo abbiamo detto che il caso di una magnetizzazione uniforme su tutta la lunghezza è piuttosto un caso limite teorico che un caso realizzabile; ma se si stesse senz'altro all'indicazione data dall'aderenza della limatura di ferro, si sarebbe portati a giudicare tale ritrazione delle regioni polari molto maggiore di quel che è in effetto.

Ed ora si comprende facilmente che, per sperimentare sopra un materiale ferromagnetico senza ricorrere alla forma di solenoide neutro, bisognerà usare un filo molto lungo e sottile, a fine di ridurre trascurabile l'azione smagnetizzante sulla massima parte della lunghezza. Viceversa le elettrocalamite che debbono smagnetizzarsi totalmente o quasi, all'interruzione della corrente, si devono fare con nuclei poco lunghi e, si capisce, di materiale dotato di piccola forza coercitiva.

Indichiamo ora sommariamente come l'altro metodo conduce agli stessi risultati. Seguendo esso, si comincia dal considerare il campo \mathbf{H} come un campo newtoniano dotato di due regioni superficiali di divergenza, l'una con densità superficiale $+4\pi\mathbf{J}$ e l'altro $-4\pi\mathbf{J}$, distribuite sulle basi della figura cilindrica. Siccome, mancando correnti proprie, è $\text{rot}\mathbf{H} = 0$ è così definito come campo newtoniano il campo $[\mathbf{H}]$ entro e fuori del magnete. La relazione tra i vettori e la condizione $\text{div}\mathbf{B} = 0$ permettono di ricavare il campo $[\mathbf{B}]$.

10) Superficie di discontinuità tra mezzi con diverse induttività magnetiche.

Se uno di tali mezzi corporei riempie una superficie tutta al finito e l'altro invade lo spazio indefinito circostante, il problema che qui trattiamo si presenta come quello di un corpo para o diamagnetico entro un mezzo indefinito pure para o diamagnetico. Si tratta quindi solo di una generalizzazione del problema precedentemente trattato nella quale in luogo di μ_p per lo spazio ambiente si dovrà porre $\mu_0\mu_p$. I principi su cui ci fondiamo sono gli stessi; le formule risulteranno di poco più complicate in quanto che il mezzo ambiente avrà ora un'induttività che indichiamo con μ'_p e una magnetizzazione non nulla che indichiamo con \mathbf{I}' . La superficie che separa i due mezzi sarà ancora in generale, sede di rotazionale del vettore \mathbf{I} uguale alla differenza $I_t - I'_t$, componente tangenziale della differenza tra i due valori limiti del vettore magnetizzazione, e sarà sede di divergenza per i vettori magnetizzazione, eccitazione magnetica e forza magnetizzante, data dalla discontinuità delle loro componenti normali. E sarà

$$B_n = B'_n$$

$$\mu_p H_n = \mu'_p H'_n \quad H_t = H'_t \quad \text{cioè} \quad \mu_p H \cos\theta = \mu'_p H' \cos\theta' \quad H \sin\theta = H' \sin\theta'$$

dalle quali si ricava facilmente la legge di rifrazione delle linee di flusso $\frac{\text{tg}\theta}{\mu_p} = \frac{\text{tg}\theta'}{\mu'_p}$

le altre formule si riducono a quelle del caso precedente ponendo $\mu'_p = 1$.

11) Corrispondenze e diversità tra il campo magnetico e il campo elettrico.

Le trattazioni tradizionali s'informano generalmente a una pretesa analogia tra i fenomeni elettrostatici negli isolanti e i fenomeni magnetici. Secondo questa analogia, il vettore magnetico \mathbf{H} , chiamato forza magnetica, corrisponderebbe a quello

5 elettrico \mathbf{E} , forza elettrica. Ciò perché il carattere di campo di forza che spetta a \mathbf{E}
 in quanto esso risulta direttamente dalla esplorazione eseguita con una carica elettrica
 spostabile, si attribuisce tradizionalmente anche ad \mathbf{H} in quanto esso risulta dalla
 esplorazione fatta idealmente con una massa magnetica, in effetto con un ago magne-
 10 tico, considerato però che è l'insieme di due masse magnetiche, uguali e opposte. Noi
 ci riserviamo di spiegare la ragione, tra poco, per cui un ago magnetico lungo e sottile
 è, in effetto capace di esplorare il campo \mathbf{H} *indipendentemente dall'induttività del*
mezzo ambiente. Per ora osserviamo che, impostata così la corrispondenza tradiziona-
 le, essa si estendeva agli altri vettori come corrispondenza di \mathbf{B} e \mathbf{D} che nella teo-
 15 ria tradizionale sono quelli che si possono calcolare in qualunque mezzo dal produtto-
 re (massa magnetica, carica elettrica) e quindi corrispondenza diretta di μ, μ_0, μ_p
 da una parte e $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_p$ dall'altra. Secondo tale concezione anche le due leggi di
 rifrazione delle linee di forza, non solo formalmente, ma anche intrinsecamente, si
 dovrebbero considerare come analoghe.

15 Richiamiamo sommariamente che questa analogia rimaneva necessariamente in-
 completa, anzi difettosa, perché mancavano nel campo magnetico fatti analoghi a
 quelli elettrici presentati dai conduttori; non solo, ma mancava anche addirittura la
 possibilità di separare radicalmente il magnetismo N da quello S contraddetta già
 dalla notissima esperienza della calamita spezzata; da questa deriva che il campo \mathbf{B} è
 20 sempre solenoidale a differenza di quello \mathbf{D} la cui divergenza attesta l'esistenza di ca-
 riche elettriche primarie. Cosicché anche nelle trattazioni tradizionali si doveva ricor-
 rere al ripiego di chiamare elettricità vera quella che costituisce le cariche da noi dette
 primarie, per affermare in corrispondenza *non esiste il magnetismo vero, ma solo*
quello libero e qualche trattatista aveva pur riconosciuto che questo non era altro se
 25 non un intermediario matematico, destituito di qualunque realtà fisica.

Secondo la concezione ormai riconosciuta giusta, diremo più semplicemente che
 non è vero che esiste il magnetismo libero come agente newtoniano, una volta che il
 campo \mathbf{B} è sempre solenoidale. Unico produttore ed esploratore del campo magne-
 tico è la corrente elettrica, o corrente propria o corrente di Ampère. E per questo noi
 30 abbiamo considerato come campo di forza $[\mathbf{B}]$ e come campo di eccitazione $[\mathbf{H}]$.

L'analogia tra il magnetismo e l'elettrostatica dei corpi isolanti è così intrinseca-
 mente negata. Una corrispondenza tra le trattazioni materialistiche dei due problemi
 sussiste ancora, ma essa risulta invertita rispetto a quella tradizionale. Per darne un'i-
 dea scrivendo nella stessa verticale i principali enti vettoriali e scalari corrispondenti,
 35 la corrispondenza tradizionale sarà indicata così

tradizionale			
E	D	ε	
H	B	μ	
la nuova, cioè la giusta			
E	D	ε	ε^{-1}
B	H	μ^{-1}	μ

perché alla relazione fondamentale elettrica $D = \epsilon E$ ovvero $E = \epsilon^{-1} D$ corrisponde la relazione fondamentale magnetica $H = \mu^{-1} B$ $B = \mu H$ e ne segue che è sovvertita anche la corrispondenza tra le due costanti universali ϵ_0 e μ_0 e tra le costanti specifiche ϵ_p e μ_p : in conseguenza le due leggi di rifrazione delle linee di flusso elettriche e magnetiche non presentano una corrispondenza diretta, ma inversa.

Siamo condotti a ritenere corretta la scrittura per le induttività elettriche

$$\frac{\text{tg}\theta}{\text{tg}\theta'} = \frac{\epsilon'_p}{\epsilon_p} = \frac{\epsilon_p^{-1}}{\epsilon_p'^{-1}} \quad \text{per le magnetiche} \quad \frac{\text{tg}\theta}{\text{tg}\theta'} = \frac{\mu_p'^{-1}}{\mu_p^{-1}} = \frac{\mu_p}{\mu_p'}$$

Ma ciò non deve sorprendere il lettore, in quanto che l'interpretazione matematica delle due leggi è, nei due casi, profondamente diversa perché quella elettrica deriva dalla discontinuità della componente normale del vettore E , quella magnetica dalla discontinuità superficiale e quindi del rot_s del vettore B .

SEGUITO DELLA TEORIA ELETTRODINAMICA DEL MAGNETISMO
PARTE SECONDA

1) Energia elettrodinamica come localizzata nel mezzo ambiente.

5 Riprendiamo l'espressione della energia elettrodinamica di due circuiti

$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$ e osserviamo che essa si può mettere anche sotto la forma $\frac{1}{2} \varphi_{11} + \frac{1}{2} \varphi_{12} i_2 + \frac{1}{2} \varphi_{21} i_1 + \frac{1}{2} \varphi_{22} i_2$ ove φ_{11} è il flusso di \mathbf{B} prodotto dalla corrente i_1 e concatenato con il circuito 1 ; φ_{12} il flusso prodotto da i_1 concatenato con 2 ; ecc. ...

10 Orbene, il ragionamento con cui queste espressioni sono state stabilite si può facilmente estendere a un numero qualunque di circuiti percorsi da altrettante correnti e si giunge così alla espressione generale dell'energia

$W = \frac{1}{2} \sum_{hk} \varphi_{hk} i_k$ essendo $\sum_h \varphi_{hk}$ il flusso di \mathbf{B} risultante dei campi prodotti da tutti i singoli circuiti e concatenati col k .

15 L'espressione $\frac{1}{2} \varphi_h i_h$ si trasforma in un integrale volumico pensando diviso lo spazio ambiente in cellule infinitesime $d\tau = da dx ds$ ove da è l'areola generica di una superficie di livello del campo \mathbf{B} e ds l'elemento lineare del tubo di flusso di \mathbf{H} e, osservando che $\varphi_h = \int_h \mathbf{B} da$ per qualunque superficie terminata al contorno h e $\int_h \mathbf{H} ds = 4\pi i_n$ per tutte le circuitazioni concatenate, si ha20 $\frac{1}{2} \varphi_h i_h = \frac{\int_h \mathbf{B} da \int_h \mathbf{H} ds}{8\pi} = \frac{\int \mathbf{B} \mathbf{H} da ds}{8\pi} = \int_h \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{H}}{8\pi} d\tau$ e quindi per l'energia complessiva

$W = \int \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{H}}{8\pi} d\tau$ esteso a tutto lo spazio ambiente. Data l'evanescenza all'infinito come infinitesimo del 6° , l'integrale improprio è manifestamente ammissibile. Resterebbe da discutere il caso di un circuito infinitamente sottile per i termini corrispondenti all'autoinduzione; ma questo è un caso irreali e mostreremo come per fili non grossi si possa estendere l'integrazione allo spazio ambiente escludendo il volume dei fili stessi e, per questo, dare un valore approssimato per l'energia di autoinduzione. Per le energie mutue ci si può contentare di fare un calcolo usando la linea asse del filo.

Nel caso in cui ci si limiti ai mezzi isotropi, \mathbf{B} e \mathbf{H} son paralleli, cioè

30 $\mathbf{B} \times \mathbf{H} = \mathbf{B} \mathbf{H}$ e si ottengono le espressioni $W = \int_{\tau} \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{2(4\pi)} d\tau = \int_{\tau} \frac{\mu H^2}{2(4\pi)} d\tau = \int_{\tau} \frac{B^2}{\mu 2(4\pi)} d\tau$.

Osserviamo però che, siccome l'integrazione deve essere estesa a tutto lo spazio, perché questa formula sia valida bisogna che siano soddisfatte le condizioni necessarie per tale estensione. Per i punti a distanza infinita dell'insieme dei circuiti considerati, la funzione sotto il segno diviene infinitesimo del sesto ordine, e ciò è largamente sufficiente per la legittimità delle estensioni dell'integrazione a tutto lo spazio. Invece, se consideriamo le spire o maglie come costituite da conduttori assimilabili a linee geometriche, avverrà che a distanza infinitesima da esse la funzione sotto il segno diviene infinita del 2° ordine e quindi l'integrale diverrebbe infinito di ordine logaritmico, il che sarebbe assurdo dal punto di vista fisico. Ma d'altra parte è fisica

mente inammissibile che un conduttore possa ridursi a una pura linea geometrica: per quanto sottile esso avrà pur sempre una sezione piccola sì, ma non nulla. È facile anche vedere che i termini dell'integrazione tendente all'infinito del secondo ordine spetterebbe solo alle energie intrinseche e non alle energie mutue, per le quali non si avrebbe mai la contemporanea tendenza all'infinito di \mathbf{H} e di \mathbf{B} .

Del resto la complicazione che ora si presenta, si era già presentata per la semplice considerazione dell'energia intrinseca sotto la prima forma ...
o nell'altra ,...

Infine, se si tentasse di calcolare il coefficiente di autoinduzione spettante ad un circuito di filo infinitamente sottile, cioè assimilabile esattamente ad una linea geometrica si troverebbe un valore infinito.

Per le induzioni mutue per fili sottili, ma non infinitamente sottili, si può ottenere una buona approssimazione sostituendo a ciascun tratto di essi una linea geometrica assiale. Per i coefficienti di autoinduzione bisogna in qualche modo tener conto dello spessore del filo. A tal fine noi consideriamo questo come diviso in tanti tubuli infinitesimi, ciascuno percorso da corrente infinitesima e il flusso concatenato con ciascuno di essi.

Per le circuitazioni che abbracciano tutto il conduttore cioè sono concatenate con tutte le linee elementari di corrente, il procedimento già tenuto è ineccepibile e se il conduttore è assai sottile, non fa piegature troppo brusche ed ha sezione circolare, si potrà ottenere una buona approssimazione calcolando il campo prodotto in ciascun punto esterno dalla corrente, considerata come concentrata nella linea assiale del filo. Il risultato darà il termine dell'energia competente allo spazio ambiente, escluso cioè il piccolo volume occupato dal materiale del filo. Ma questa porzione, per quanto sia piccolo il volume, porta un termine che non è trascurabile e del quale si può tener conto con un calcolo che faremo per il caso semplificato che il conduttore sia cilindrico (cioè diritto), il quale dà pure una buona approssimazione finché il raggio di curvatura del filo sia grande rispetto al suo diametro.

Consideriamo dunque un cilindro di raggio R e indichiamo con i l'intensità della corrente la quale consideriamo con densità distribuita uniformemente su tutta la sezione¹. Consideriamo allora l'area della sezione divisa in corone circolari infinitesime: la generica abbia il raggio r e la larghezza l : siccome tutto è simmetrico interno all'asse, le linee di flusso comuni dei vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} saranno circolari concentrate sull'asse. Il valore del vettore \mathbf{H} sarà dato per ciascun circolo di raggio r dalla intensità complessiva che traversa l'area del circolo divisa per la lunghezza della circuitazione, cioè da

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi i}{2\pi r} \frac{r^2}{R^2} = 2i \frac{r}{R^2} \quad \text{e, indicando con } \mu \text{ l'induttività del}$$

conduttore, $\mathbf{B} = 2\mu i \frac{r}{R^2}$.

¹ Ciò corrisponde al vero se il conduttore è omogeneo e se la corrente è costante (cioè anche soggetta a lente variazioni), ma non se la corrente è rapidamente variabile. In tal caso l'effetto dell'autoinduzione si fa sentire differenzialmente per gli strati più superficiali e per quelli più vicini all'asse del cilindro e ciò complica grandemente l'andamento dei fenomeni: la teoria è assai difficile e complicata, ma porta in questo caso semplice a risultati che concordano con quelli sperimentali. Infine per correnti alternative, e tanto più quanto maggiore è la frequenza, la corrente si concentra negli strati corticali dando lo stesso effetto come di un aumento della resistenza ohmica, cioè un maggiore sviluppo di calore (effetto pelle).

Infine, nel caso considerato di fili cilindrici alquanto sottili e relativamente poco incurvati, che è infine il caso più comune nella pratica, l'energia totale si ottiene con buona approssimazione aggiungendo all'integrale volumico esteso a tutto lo spazio ambiente per ogni maglia un termine pari a

$$5 \int_1 \frac{BH}{8\pi} l ds = 1 \int \frac{\mu i^2 r^3}{R^4} dr = 1 \int_0^R \frac{\mu i^2 r^3}{R^4} dr = \frac{\mu i^2}{R^4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\mu i^2}{R^4} \frac{R^4}{4} = \frac{\mu i^2}{4} \quad \text{cioè, infine, complessivamente}$$

$$\frac{1}{4} \sum \mu l_k i^2 . \quad \text{Questa espressione è valida solo (con buona approssimazione)}$$

quando il mezzo ambiente sia molto esteso e omogeneo e i fili occupino una piccola parte del volume totale, essendo esclusi materiali ferromagnetici.

10 Notiamo subito che l'espressione dell'energia elettrodinamica considerata come localizzata nello spazio presenta un'analogia con quella dell'energia elettrostatica; analogia però che nella concezione elettrodinamica del magnetismo si presenta come a suo tempo illustreremo in modo diverso, anzi inverso, che nella teoria tradizionale¹.

15 2) Energia dei corpi ferromagnetici.

Ci contenteremo di trattare questo importante argomento in un caso geometricamente semplice, seguendo sempre il metodo già da noi usato. Consideriamo un solenoide elettromagnetico o neutro o estremamente allungato, tale in ogni modo che il campo nel suo interno abbia un valore costante anche se esso è ripieno di una sostanza ferromagnetica. E sia N il numero totale delle spire dell'avvolgimento percorso dalla corrente elettrica. Indichiamo ancora con φ il flusso attraverso una sua qualunque sezione della forza magnetica \mathbf{B} .

La forza elettromotrice indotta per una variazione del flusso sarà

$$25 \quad E = N \frac{d\varphi}{dt} = N a \frac{dB}{dt} \quad \text{e quindi l'energia fornita dall'elettromotore per produrre tale variazione} \quad dW = N a i dB \quad \text{ove } i \text{ indica l'intensità della corrente magnetizzante.}$$

Questa espressione può trasformarsi in un'altra che ci rappresenta l'energia come distribuita uniformemente nel volume della sostanza magnetizzata. Sia V questo volume (essendo a l'area della sezione normale e l la lunghezza del solenoide) e osserviamo che è intanto

$$30 \quad dW = V \frac{N}{l} i dB \quad \text{ma} \quad \frac{Ni}{l} \cong \frac{H}{4\pi} \quad \text{cioè} \\ dW = V \frac{H}{4\pi} dB \quad \text{ma} \quad B = \mu_0 (H + 4\pi J) \quad \text{onde} \quad W = \mu_0 V \int \left(\frac{HdH}{4\pi} + HdJ \right) \\ \text{cioè} \quad dW = \mu_0 V \int \left(\frac{HdH}{4\pi} + \frac{d}{JH} - JdH \right) .$$

Possiamo osservare che i primi due termini entro la parentesi costituiscono un differenziale esatto, cioè il differenziale dell'espressione $\frac{H^2}{8\pi} + HJ$; non così l'ultimo se B_H non è una funzione a un solo valore di H .

35 E quindi integrando lungo un cammino chiuso resterà $-\int JdH$ cioè l'energia dissipata per unità di volume è uguale all'area della grafica del ciclo, ed è positiva, essendo maggiori i valori di B per H decrescente (come tutti sanno).

¹ Il lettore può riconoscere che anche il termine rappresentato dalla sommatoria si poteva calcolare estendendo al volume occupato dai conduttori sottili, ma non infinitamente sottili, l'integrale volumico generale. Ciò esclude ogni dubbio sulla legittimità del procedimento.

La teoria elettrodinamica rende molto chiara l'interpretazione dell'espressione $\mu_0 \left(\frac{H^2}{8\pi} + HJ \right)$ che chiameremo *energia magnetica reversibile* la quale è la somma di due termini: il primo $\mu_0 \frac{H^2}{8\pi}$ (come si ottiene con una nota e facile trasformazione) non è dunque che l'energia intrinseca della corrente magnetizzante, considerata a sé, cioè nel vuoto; l'altro si può pure trasformare scomponendo nella somma di tanti termini, ciascuno corrispondente a un tronco di tubo di flusso con lunghezza dl e sezione da e comprendente l'elemento di volume $dV = dl da$ e ricordando che $i_A = J \cdot da$. Cioè ogni termine equivale al prodotto delle correnti equivalenti di Ampère che involgono l'elemento, per il flusso di forza magnetizzante con esse concatenato. E, a parole: l'energia magnetica reversibile è uguale all'energia intrinseca della corrente magnetizzante (considerata nel vuoto) più l'energia mutua di essa con le correnti di Ampère.

Le induttività e le suscettività sono state fin qui riferite naturalmente al vuoto, poiché nell'etere libero, mancando le correnti di Ampère, secondo questa teoria risulta, non per convenzione, ma per necessità, $i_A = 0$. Ma le esperienze non si fanno nel vuoto, sibbene nell'aria, salvo a ridurre, se è il caso, i risultati al vuoto. Per questo dovremo ora considerare gli effetti di una forza magnetizzante sopra il corpo in esame, non solo in relazione alla forza magnetizzante stessa, ma anche agli effetti che essa produrrebbe sul mezzo materiale ambiente spostato dal corpo. Il corpo di induttività μ_p in esame e il mezzo d'induttività ... siano dunque sottoposti alla stessa forza magnetizzante di intensità ... ; avremo le due relazioni: ...

Consideriamo ora la differenza ... ove l'indice ... sta a dimostrare che è la differenza di due magnetizzazioni a parità di forza magnetizzante, e chiamiamola *intensità balistica di magnetizzazione del corpo nel mezzo* perché la sua misura diretta si fa appunto col metodo detto balistico adoperando la formula che discende subito dalle due precedenti ... dove ... e ... risultano da misure indotte. Osservando poi che, per essere ... sarà anche ...

Si vede subito che ... coincide con la intensità di magnetizzazione secondo la comune teoria, la quale è considerata come una grandezza omogenea con ... e non con ... essendo nella comune teoria l'induttività una grandezza fisica; sicché la (...) secondo tale teoria si riduce alla ...

solo per la convenzione ... che si stabilisce per il vuoto, considerato come mezzo campione, per definire l'unità di polo magnetico.

40 3) Confronto tra le espressioni dell'energia elettrostatica ed elettrodinamica.

Riprendiamo a considerare l'espressione dell'energia considerata come localizzata nel mezzo, supponendo questo non ferromagnetico, cioè dotata di un'induttività co

stante anche al variare del campo e chiamiamo densità dell'energia l'espressione ora trovata, la quale si può mettere sotto tre forme ...

E osserviamo che queste corrispondono perfettamente se ai vettori

...

5 corrispondono ordinatamente quelli come si ritiene nella teoria tradizionale. Ma noi abbiamo già osservato che tale corrispondenza è sovvertita dalla teoria elettrodinamica, conseguentemente la corrispondenza si deve intendere ristabilita a condizione di cominciare con il far corrispondere

10 Un particolare interesse presenta il caso semplice e fondamentale in cui si tratti dello spazio vuoto, cioè si ha ...

Allora le espressioni si scriveranno riferendosi ai rispettivi campi di forza.

4) Sistemi di misura elettrostatico ed elettromagnetico in relazione con l'energia.

15 L'adozione dei due sistemi e.m. ed e.s. rispettivamente per l'energia e.m., ossia elettrodinamica, ed e.s., le riduce alla forma identica per le due specie di energia. È noto che un tale sistema misto è in uso nella teoria di Maxwell di cui parleremo nel successivo capitolo. Invero dopo tutto quello che è stato detto riguardo ai sistemi metrici, tale sistema misto può sembrare assurdo, o poco meno, in quanto che stabilisce
20 una omogeneità apparente tra enti essenzialmente eterogenei. Ma a tale obiezione si può rispondere che due enti fisicamente eterogenei secondo certi rispetti, si possono anche considerare come omogenei da un punto di vista più generale; e citare in proposito il classico concetto di massa che permette di stabilire l'uguaglianza quantitativa fra le due quantità di materiali chimicamente diversi e, almeno chimicamente, non
25 trasformabili l'uno nell'altro.

Da un simile punto di vista non sarà assurdo pensare che un campo elettrico possa essere uguale come intensità, cioè come grandezza ad un campo magnetico quando le corrispondenti energie per unità di volume abbiano lo stesso valore. Essi si penseranno uguali come campi di forza capaci di conferire allo spazio libero una determinata
30 quantità di energia; considerandoli cioè come facenti parte di una categoria più generale caratterizzata da una proprietà veramente comune all'uno e all'altro. Da questo punto di vista il sistema misto maxwelliano si considera come sistema energetico, e ci si presenta come il più appropriato per trattare i problemi che faranno argomento del seguente capitolo, cioè quelli della propagazione dell'energia nello spazio libero e
35 delle radiazioni. Che se invece dello spazio libero si tratterà di un mezzo corporeo, non avremo altra modificazione da fare che fare intervenire i due numeri pur che abbiamo designato con ... e ...

La connessione tra i due ordini di fenomeni sarà senz'altra stabilita dalla costante universale c che già abbiamo designato col nome di *velocità critica*.

40

?) Dipendenza delle azioni elettromagnetiche e delle azioni magnetico-mutue dal mezzo ambiente.

Ma per avere stabilito in modo preciso e completo i concetti generali della teoria elettrodinamica del magnetismo, dobbiamo ancora trattare di questo problema; cioè

inquadrare in questa teoria le leggi su tale dipendenza che sono già note e che sembrano facilmente giustificabili (giustificazione invero alquanto superficiale) con la pretesa analogia tra elettrostatica e magnetismo. Secondo quest'analogia la legge delle azioni tra magneti permanenti corrispondeva puntualmente a quella delle interazioni fra cariche elettriche ed esisteva cioè una perfetta analogia in ogni caso fra le due leggi di Coulomb, implicante anche la proporzionalità inversa alle induttività rispettivamente elettrica e magnetica del mezzo ambiente. Così l'insieme delle quattro leggi era già conosciuto ed espresso dai seguenti enunciati, i quali però nei vecchi trattati non si trovano in generale considerati simultaneamente.

5 1) Azioni elettrostatiche.

Proporzionalità inversa all'induttività ε del mezzo ambiente.

2) Azioni magneto-mutue.

Proporzionalità inversa all'induttività μ del mezzo ambiente.

3) Azioni elettromagnetiche.

15 Indipendenza dall'induttività del mezzo ambiente.

4) Azioni elettrodinamiche.

Proporzionalità diretta all'induttività μ del mezzo ambiente.

E qui è bene osservare che la validità della seconda, terza e quarta legge, più che essere dimostrate una per una da esperimenti precisi, avevano il loro solido fondamento nelle esperienze numerose e ben note le quali mettono fuori di dubbio che gli effetti dell'induzione elettrodinamica sono proporzionali all'induttività μ del mezzo ambiente, le quali esperienze costituiscono anzi l'unico modo di determinare con precisione il valore di essa, e quindi si potevano anche considerare come il migliore modo di definirla.

Data poi la relazione tra gli effetti d'induzione e le interazioni meccaniche elettrodinamiche (relazione da gran tempo conosciuta e indubitabile perché collegata al principio di conservazione dell'energia) risultava certa l'ultima delle quattro leggi. Siccome erano inoltre già conosciute le leggi che collegano i vettori \mathbf{H} , \mathbf{B}_0 , \mathbf{I} , qualunque ne fosse l'interpretazione, così si riconobbe che accettando anche le leggi 2° e 3° si riusciva a costituire un insieme logicamente collegato e anche conforme alle svariate esperienze di carattere solo qualitativo, o tutt'al più, grossolanamente approssimativo, più direttamente attinenti a questo soggetto.

Ma la teoria elettrodinamica del magnetismo dà modo di fare assai di più e meglio, perché fornisce una deduzione matematica esatta di quelle leggi, un'interpretazione veramente persuasiva del loro significato, e infine una precisa determinazione delle condizioni della loro validità. A prima vista il confronto fra la 2° legge e la 4° (proporzionalità inversa e proporzionalità diretta a μ) può parere addirittura incompatibile con la riduzione dei fatti magnetici ad elettrodinamici: bisogna dunque cominciare ad eliminare questa difficoltà la quale, se non fosse apparente, si tradurrebbe in una impossibilità di una teoria elettrodinamica del magnetismo.

A tal fine riprendiamo in considerazione il solenoide elettrodinamico lungo sottile e uniforme e ponendo per semplicità $i_{n1} = i_1$, ricordiamo che per i vettori \mathbf{H} e \mathbf{B} e per il loro flusso, esclusi due brevi tratti vicini agli estremi, si hanno i valori

$$H = 4\pi i_1 \quad B = \mu H = \mu 4\pi i_1 \quad \varphi(\mathbf{H}) = 4\pi a i_1 \quad \varphi(\mathbf{B}) = \mu 4\pi a i_1$$

essendo μ l'induttività del mezzo nello spazio ambiente e nella sottile regione tubolare nell'interno del solenoide stesso. Consideriamo ora ciò che chiameremo solenoide cieco o tappato intendendo: solenoide tale che nell'interno dello spazio tubolare non possa penetrare il mezzo ambiente, qualunque questo sia. Nello spazio tubolare sarà allora lo stesso valore dell'induttività e, per semplicità, potremo pensare che esso rimanga sempre vuoto, e quindi che l'induttività vi sia sempre μ_0 . Allora avremo i valori

$$H = 4\pi i_1 \quad B = \mu_0 4\pi i_1 \quad \varphi(\mathbf{H}) = 4\pi i_1 a \quad \varphi(\mathbf{B}) = \mu_0 4\pi i_1 a$$

Orbene, siccome il vettore è in ogni luogo solenoidale, così il flusso di esso uscente dall'estremo polare Nord nello spazio ambiente e rientrando per l'estremo polare Sud avrà in ogni caso lo stesso valore del flusso percorrente lo spazio tubolare $\mu_0 4\pi i_1 a$ cioè sempre lo stesso valore, qualunque sia il mezzo ambiente. Un tale solenoide, sempre percorso da corrente costante, produrrà in qualunque mezzo ambiente lo stesso campo del vettore \mathbf{B} , e quindi un campo di \mathbf{H} d'intensità inversamente proporzionale all'induttività del mezzo ambiente. E notiamo che un simile risultato si avrà in generale, anche se lo spazio tubolare non è vuoto, ma rimane sempre occupato da uno stesso mezzo corporeo. Il modo più spiccio di realizzare dunque un solenoide cieco, sarà quello di avvolgere in strette spire un filo conduttore sottilissimo sopra un filo molto sottile, ma molto lungo rispetto alle sue dimensioni trasversali, costituito da un materiale qualunque, purché non ferro-magnetico.

L'azione meccanica elettrodinamica di un tale solenoide sopra un qualunque avvolgimento sottile percorso pure da corrente costante, dipendono unicamente, in ciascuna posizione, dal flusso del vettore \mathbf{B} prodotto dal solenoide e concatenato coll'avvolgimento, perciò risulterà indipendente dall'induttività del mezzo. Lo stesso sarà dell'azione meccanica esercitata dall'avvolgimento sul solenoide. Tali azioni risultano dunque indipendenti dalla induttività del mezzo ambiente, e ciò è conforme all'enunciato della legge 3°.

Se invece si usa un sistema a quattro unità, cioè si seguono i concetti metrici di G. Giorgi, le due espressioni restano diverse. Per i solenoidi ciechi abbiamo

$$F = \frac{\mu_0}{\mu_p} \frac{P_E P'_E}{r^2} \quad \text{mentre per i magneti si dovrebbe ancora scrivere} \quad F = \frac{1}{\mu_0 \mu_p} \frac{P_M P'_M}{r^2} .$$

Questa discrepanza non è però di natura intrinseca, ma di origine puramente metrologica: proviene cioè da questo, che nelle due esperienze il polo magnetico è misurato secondo due convenzioni diverse. E per questo è stato messo nella prima espressione l'indice E e nella seconda l'indice M per indicare rispettivamente misura elettrodinamica e misura magnetostatica del polo magnetico. La diversità scompare ponendo $P_E = \frac{P_M}{\mu_0}$ il quale valore sostituito nella prima espressione la trasforma manifestamente nella seconda.

Questa trasformazione completa l'inquadramento della tradizionale magnetostatica nella teoria elettrodinamica del magnetismo.

40 ?) Il magnete lungo e sottile considerato come solenoide cieco.

Secondo la teoria elettrodinamica, un magnete lungo e sottile consiste in un aggregato ordinato di correnti di Ampère. Essendo la magnetizzazione uniforme e quindi anche rappresentata da un vettore lamellare, queste correnti di Ampère, regolarizzate nelle correnti equivalenti di Ampère, possono esser ricondotte alla superficie laterale del magnete in una corrente laminare avente per unità di lunghezza l'intensità

$i_1 = i_H = J$. Se il magnete è rigorosamente permanente, cioè riguardo alla magnetizzazione, rigido, vale a dire se questa si ritiene del tutto indipendente dalle

azioni esterne, e quindi anche dalle correnti di Ampère circolanti nel mezzo ambiente, ciò significa che non vi è nessuna possibilità di modificazione delle correnti circolanti nel suo interno, cioè nessuna possibilità di produzione di altre correnti di Ampère al materiale rigidamente magnetizzato, noi dovremo negare dunque una ulteriore capacità di essere magnetizzato, cioè attribuire ad esso una suscettività nulla e una induttività uguale a uno. Secondo questa concezione il magnete considerato si può dire che sarà addirittura un solenoide cieco percorso da corrente costante. Del resto è già noto da molto tempo che affinché si verifichi la legge di Coulomb è necessaria la rigidità magnetica e questa si realizza, se non rigorosamente, almeno con buona approssimazione, usando materiali ad alta forza coercitiva, e forma sottile e molto allungata.

?) La condizione di equivalenza tra magneti e correnti nella concezione tradizionale e nella concezione elettrodinamica.

Ricordando che è $P_E = ai_1$ la formula di trasformazione $P_E = \frac{P_M}{\mu_0}$

potrà essere messa nella forma $ai_1 = \frac{P_M}{\mu_0}$. Questa uguaglianza, considerata in sé come una equazione in i_1 , esprime la condizione cui deve soddisfare l'intensità della corrente nel solenoide cieco, a fine che esso equivalga ad un dato magnete.

Essa esprime dunque sotto una nuova forma la condizione di equivalenza tra correnti elettriche e magneti. Dico nuova perché nella teoria tradizionale tale equivalenza si stabiliva inizialmente anziché fra magneti allungatissimi e solenoidi, tra lamine magnetiche e spire percorse da corrente¹. Tale concezione era giusta dal punto di vista matematico, cioè come relazione tra campo di doppio strato e campo di anello vorticoso sottile (v. Preliminari matematici) e non ne nasceva alcun inconveniente finché si consideravano questi enti nello spazio vuoto di materia. Ma se si passava a considerare diversi mezzi ambienti, essa diveniva incompatibile con la legge 3° in quanto che il campo del vettore prodotto dalla lamina magnetica risultava per questa legge inversamente proporzionale all'induttività, mentre quello prodotto dalla spira ne era indipendente, cosicché stabilita l'equivalenza nel vuoto, essa non si manteneva in un mezzo di induttività $\mu_0 \neq 1$. Per ristabilirla bisognava variare l'intensità della corrente circolante nella spira via via in ragione inversa all'induttività. Vale a dire in generale la condizione di equivalenza si doveva scrivere nella forma $i = \frac{P}{M}$.

¹ Nella forma $i = P$ in unità e.m. che darebbe $i = \frac{P}{\mu_0}$ in un sistema Giorgi.

In altre parole un avvolgimento di filo sottile produce direttamente in ogni mezzo lo stesso campo di \mathbf{H} e un campo di \mathbf{B} direttamente proporzionale all'induttività; il solenoide cieco produce direttamente in ogni mezzo ambiente lo stesso campo di \mathbf{B} e quindi campi di \mathbf{B}_0 e \mathbf{H} inversamente proporzionali all'induttività ovvero l'avvolgimento sottile (anche a forma di solenoide) è produttore diretto del campo \mathbf{H} ed esploratore di quello \mathbf{B} : invece il solenoide cieco è produttore diretto del campo \mathbf{B} ed esploratore del campo \mathbf{H} .

Stabilito ciò, segue senz'altro che le interazioni meccaniche fra due solenoidi ciechi risulteranno d'intensità inversamente proporzionale all'induttività del mezzo, cioè varrà per esse la legge 2° già da gran tempo assegnata alle interazioni tra magneti. La difficoltà prospettata era dunque apparente. L'attuale teoria elettrodinamica ci presenta dunque nel solenoide cieco alimentato da corrente costante un oggetto puramente elettrodinamico nel senso stretto della parola, che si comporta sotto tutti i rispetti come un magnete permanente lungo e sottile a magnetizzazione costante.

È stabilita così la vera equivalenza fisica tra un sistema di correnti (correnti proprie) e un magnete, equivalenza che, una volta stabilita avendo fissato opportunamente l'intensità della corrente elettrica, vale indipendentemente dall'induttività del mezzo ambiente. A questo punto si devono fare le importanti osservazioni che seguono.

?) L'espressione della legge di Coulomb con diversi sistemi metrici.

Ricordando che è in generale $\mu = \mu_p \mu_0$, se si adotta il sistema di misure elettromagnetico nel quale è $\mu_0 = 1$ la legge della interazione tra due poli P e P' , sia per i magneti sia per i solenoidi ciechi, ha la medesima espressione $F = \frac{1}{\mu_p} \frac{PP'}{r^2}$, cioè l'equivalenza non era indipendente dal mezzo ambiente; non poteva quindi avere un valore ed un significato intrinseco, né ammettere quindi una riduzione di magneti e correnti. È questo un altro aspetto sotto cui si presentava la difficoltà ora prospettata. Ma sotto quest'aspetto essa era una conseguenza della erronea scelta del caso geometrico, la quale, come ora vedremo, è da scartare per ragioni fisiche. Il lettore ha già certo notato che per la validità del ragionamento che precede, è condizione necessaria la indipendenza dal flusso di \mathbf{B} dal mezzo ambiente, e perciò è necessario che le dimensioni trasversali del solenoide siano trascurabili rispetto alla lunghezza. D'altra parte si può anche osservare che per la validità della 2° e della 3° legge, è necessario che il mezzo ambiente sia omogeneo e quindi lo spazio occupato dal conduttore abbia volume (ma non lunghezza) trascurabile. In conclusione, le leggi 2° e 3° sarebbero valide per magneti infinitamente sottili rispetto alla lunghezza e per conduttori percorsi da correnti proprie pure infinitamente sottili (a differenza di ciò che avviene per la legge 4° la quale è valida per qualsiasi figura geometrica dei conduttori, purché lo spazio ambiente abbia induttività elettrica uniforme): cioè varrebbero con tanta migliore approssimazione quanto più ci si approssima a questo caso limite ideale.

Per esempio, per un magnete permanente cilindrico o prismatico con magnetizzazione longitudinale uniforme, quale è stato considerato al paragrafo , anche suppo-

sto rigido, cioè a magnetizzazione rigorosamente costante, ma di dimensioni trasversali non trascurabili rispetto alla lunghezza, è manifesto che il campo di \mathbf{B} nell'interno non è del tutto indipendente dalle correnti di Ampère esistenti nel mezzo ambiente: queste porteranno un contributo anche nella parte mediana che sarà tanto maggiore quanto più il magnete è grosso rispetto alla lunghezza. Inoltre, tale contributo, essendo la assoluta rigidità matematica irrealizzabile, anche con materiali a grande forza coercitiva, renderà imperfetta anche la costanza della magnetizzazione e precisamente la indipendenza di questa dal mezzo ambiente.

In conclusione, la legge 2° e 3° non saranno più valide. Non solo, ma non vi sarà nemmeno un modo sicuro di determinare le inevitabili, sia pur piccole, variazioni dell'intensità di magnetizzazione. Invece nel caso di un magnete allungatissimo, non solo si realizza con ottima approssimazione la costanza della magnetizzazione, ma è facile verificarla sperimentalmente oppure anche apportare una correzione nel caso che, per qualsiasi ragione, essa subisse qualche piccola variazione. Perciò basta avvolgere intorno ad un tratto non troppo vicino agli estremi un certo numero di spire di filo sottilissimo, chiudendo il circuito sopra un galvanometro molto sensibile, posto lontano: questo indicherà con effetto d'induzione qualunque variazione del flusso di \mathbf{B} concatenato, il quale dipenderà solo dalla intensità della magnetizzazione, essendo trascurabile il termine dovuto alla forza magnetizzante. In altre parole il caso limite di validità delle leggi 2° e 3° è l'unico che, se realizzato con conveniente approssimazione, permette una vera verifica delle leggi: il che equivale a dire l'unico in cui esse abbiano un significato fisico veramente determinato.

Da tutto ciò risulta che sono da rigettare, a questo proposito, i magneti permanenti grossi e corti, il cui caso estremo al limite darebbe quello della lamina magnetica se anche questa si potesse considerare come un oggetto fisico reale, perché in effetto, a quanto io mi sappia, non si è mai nemmeno cercato sul serio di realizzarla. Ritengo che con ciò risultino non solo dimostrate e interpretate le leggi, ma precisato anche il loro carattere e la loro validità. Ma a questo proposito è interessante aggiungere qualche altra informazione.

a) Del fatto che il solenoide cieco (e quindi anche il magnete allungato) costituisca un esploratore diretto del campo \mathbf{H} oppure \mathbf{B}_0 ci si può rendere ragione considerando la rifrazione delle linee di flusso al passaggio dal mezzo ambiente di inducibilità μ all'interno d'induttività μ' il quale importa una riduzione del componente tangenziale alle pareti laterali e quindi una riduzione appunto nel rapporto $\frac{\mu'}{\mu}$ del componente del vettore \mathbf{B} che risulta concatenato con le spire della corrente. Ma a questo punto è opportuna un'altra osservazione.

b) Le energie e le forze che noi consideriamo sono proporzionali direttamente ad entrambe le intensità della corrente, ossia correnti proprie o amperiane, e quindi si annullano quando si annulla una di esse. Ma a tutto rigore vi sono da considerare delle altre forze, che noi abbiamo trascurato, le quali si esercitano anche sopra, diciamo così, l'anima del solenoide cieco; si tratta delle forze dovute alle discontinuità del mezzo e quindi del vettore magnetizzazione ad essa connessa, magnetizzazione, dico, causata dal campo esistente nell'ambiente; e che, manifestamente, a causa della picco-

lezza della superficie, risultano di non grande entità e vengono di gran lunga superate da quelle già considerate appena la corrente nel solenoide non sia esigua. In conclusione si tratta di un caso del problema generale delle azioni elettrodinamiche e quindi anche magnetiche di un campo magnetico sopra corpi non inizialmente magnetizzati d'induttività diversa da quella del mezzo ambiente, supposto questo, per chiarezza, fluido.

5
10
15
Questo problema presenta un analogia (veramente imperfetta) con quella dell'azione dei corpi elettrizzati sopra a corpi allo stato neutro di induttività elettrica diversa da quella del mezzo ambiente. Una trattazione elementare capace di risultati più qualitativi che quantitativi, si può fare considerando per il caso elettrico le cariche secondarie, per il magnetico le regioni polari che si presentano alle superfici di discontinuità e così ci si può rendere ragione del risultato delle più comuni esperienze. Ma una trattazione più approfondita implica uno studio geometrico esauriente dell'andamento delle linee di flusso e della distribuzione in tutto il campo dell'energia, cioè si presenta come un problema complesso e difficile di fisica-matematica.

20
25
Per ragioni quindi diverse, e se si vuole opposte, abbiamo creduto di non includere questo argomento nel presente trattato. Le trattazioni tradizionali più elaborate contengono le soluzioni di alcuni casi particolari di speciale importanza; e riteniamo che, se qualche cultore della fisica-matematica si prenderà cura di trasformare quelle trattazioni mettendole nei termini della teoria elettrodinamica del magnetismo, farà opera non priva d'interesse. Ad ogni modo l'identità delle relazioni fra i vettori e delle espressioni dell'energia nelle due trattazioni escludono che i risultati, quanto agli effetti verificabili con l'esperienza, possano essere discrepanti.

PARTE SECONDA

CAMPI VARIABILI NEL TEMPO

5 Nella prima parte si siamo posti come oggetto le leggi del campo elettrodinamico
 costante nel tempo; e se abbiamo considerato dei cambiamenti nel tempo si è fatto so-
 10 lo per confrontare un certo stato permanente con un altro; anzi di questo metodo ci
 siamo valse fin da principio stabilendo le leggi del campo elettrodinamico per mezzo
 dei fenomeni d'induzione. Ma se abbiamo considerato le variazioni nel tempo, ab-
 15 biamo fatto ciò come mezzo non come fine della ricerca. Ora poniamo appunto que-
 ste variazioni come obbietto e fine della seconda parte del nostro discorso.

?) Le correnti di spostamento secondo Maxwell.

Abbiamo già detto nella prima parte che la densità di questa era espressa da
 15 $\frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{dE}{dt} + \frac{d}{4\pi dt} \epsilon_0 (\epsilon_p - 1) E$ osservando che solo una sua parte $\frac{d}{4\pi dt} \epsilon_0 (\epsilon_p - 1) E$,
 la quale si annulla nello spazio vuoto, si può considerare come un vero spostamento
 di cariche elettriche; ma avvertendo che con ciò si restava impegnati a riprendere in
 considerazione la corrente di spostamento maxwelliana per mostrare il contenuto di
 vero che a tale concezione, allo stato attuale della scienza, si deve attribuire.

20 In passato quando si concepiva l'etere come un mezzo similcorporeo dotato di in-
 duttività elettrica e magnetica riempiente tutto lo spazio, in tale concezione si poteva
 inquadrare quello di un vero spostamento di elettricità, pensando questo come un
 fluido incompressibile che si muovesse liberamente nei conduttori (salvo ad incontra-
 re una resistenza passiva, resistenza ohmica) e soggetto invece ad una forza di ri-
 25 chiamo (simile in un certo modo ad una forza elastica) nei mezzi isolanti e anche nel-
 lo spazio vuoto in quanto che questo non si pensava come radicalmente diverso da
 quelli; si concepiva cioè anch'esso come un mezzo dielettrico. Ciò dette origine ap-
 punto alla nomenclatura di spostamento data al vettore D . E precisamente la varia-
 zione di questo nel tempo costituiva la corrente di spostamento maxwelliana.

30 Abbiamo anche osservato che le leggi di Laplace e di Ampère erano verificate
 con l'esperienza per circuiti chiusi e quindi per singoli tratti del circuito cioè come
 leggi elementari si poteva ammettere che non fossero vere, ma dalla vera legge diffe-
 rissero per termini tali che necessariamente si annullassero nell'integrazione lungo un
 percorso chiuso; e ciò ormai sappiamo che è il caso per la legge di Ampère.

35 Siccome non si riusciva a sperimentare sopra singoli tratti distaccati dal resto,
 così ci si trovava di fronte all'impossibilità di accertare le vere leggi per una corrente
 aperta, quale è in realtà quella che per un breve tempo può passare da un conduttore
 isolato ad un altro pure isolato quando questi siano dotati di un'apprezzabile capacità,
 Questo problema parve per lungo tempo insolubile; quando Maxwell introdusse il
 40 concetto della corrente di spostamento i fisici si consolarono ritenendo che addirittura
 esse fosse privo di senso perché non esistevano correnti aperte. Ma allo stato attuale
 della scienza tale consolazione non sarebbe più ammissibile perché la corrente elettri-
 ca sappiamo ormai essere un movimento complessivo di innumerevoli cariche elettri-

che discrete e quindi non si può considerare una corrente elettrica ove non si trovano tali cariche. D'altra parte, qualunque cosa si pensi riguardo all'esistenza dell'etere, è certo che esso non si può ormai concepire (o più propriamente diremo rappresentare alla nostra mente) come un oggetto similcorporeo, quale sarebbe un mezzo dotato delle proprietà magnetiche ed elettriche dei corpi isolanti. Un tal mezzo appunto, secondo la teoria elettromagnetica della luce di cui ora daremo un cenno, costituirebbe il mezzo di propagazione delle onde luminose, come l'aria od altri corpi elastici costituiscono un mezzo di propagazione del suono: le onde luminose si propagherebbero nel vuoto con la loro costante velocità rispetto a questo mezzo, e quindi rispetto ad un altro riferimento presenterebbero una velocità di propagazione diversa; e precisamente la differenza vettoriale della velocità propria rispetto all'etere e di quella del riferimento. E vedremo che ciò è contraddetto dall'esperienza.

Il concetto di un etere similcorporeo è quindi incompatibile anche con la teoria della relatività secondo Albert Einstein¹ la quale, appunto da quella esperienza prese le mosse. Per tutte queste buone ragioni noi dobbiamo presentarci sotto altro aspetto ciò che Maxwell considerò come una vera e propria corrente elettrica. La necessità di farlo consiste in questo, che l'ipotetica corrente di spostamento maxwelliana è, come quella nei conduttori, origine di campo elettrodinamico ossia magnetico: di modo che sebbene la vera e propria corrente elettrica in sé può rimanere aperta, per gli effetti elettrodinamici essa appare sempre come chiusa; e in ciò appunto consiste essenzialmente la grande scoperta teorica del Maxwell che fu confermata dalle esperienze di Herzt², di Righi e di molti altri, e della quale ci sono ormai familiarissime le applicazioni nelle radiocomunicazioni. Inoltre, dal punto di vista della scienza pura, costituisce un grande passo verso la concezione unitaria dei fenomeni fisici, in quanto che comprende in una unica teoria le due discipline fino ad allora sostanzialmente diverse, l'ottica e l'elettricità: la più grandiosa sintesi scientifica del secolo XIX e forse di tutta la storia della scienza.

Noi sostituiremo alle concezioni ipotetiche sopra accennate alcune osservazioni di carattere puramente matematico che servono a inquadrare in modo perfettamente logico fatti che con quell'ipotesi venivano spiegati. Invero queste considerazioni ci guidano con un procedimento induttivo facile e convincente a stabilire quel sistema di equazioni generali, le equazioni di Maxwell, dalle quali per integrazioni i fenomeni possono esser calcolati.

35 2) Rotore del campo magnetico in generale. Equazioni di Maxwell.

Cominciamo dal caso più semplice, che lo spazio ambiente sia vuoto salvo si capisce il conduttore che guida la corrente. Partiamo dai presupposti: \mathbf{B} è solenoidale; il rotore coincide con $4\pi i$ cioè a meno di 4π con la densità della corrente elettrica. Noi sappiamo d'altra parte che il vettore rotazionale è necessariamente solenoidale, quindi ove la corrente elettrica si arresti siamo nella necessità matematica di ricercare un altro vettore che ne possa prendere le veci come rotore del campo. Orbene,

¹ Albert Einstein, 1879-1955, fisico tedesco, poi naturalizzato svizzero e infine USA.

² Heinrich Rudolf Hertz, 1857-1894, fisico tedesco.

ciò che è detto al cap. III, sulle correnti di spostamento, ci suggerisce senz'altro in tale funzione il vettore $\epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}$. Accettando tale concetto siamo indotti a scrivere

$$\text{rot}\mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} + 4\pi\mathbf{i}$$

5 la quale è matematicamente corretta in quanto che la somma vettoriale che costituisce il secondo membro è appunto un vettore solenoidale in tutto lo spazio. Questa equazione rappresenta una generalizzazione della legge elettromagnetica. Essa è ora scritta riferendosi a unità di misura di un sistema unico del tipo di G. Giorgi. Ma abbiamo detto che per i problemi di cui ora andiamo a occuparci è più comodo usare il sistema misto già usato da Maxwell e cioè l'unità elettrostatiche per gli enti elettrici, le elettromagnetiche per quelli magnetici. Allora siccome il secondo membro appartiene alla specie densità di corrente, e \mathbf{E} e \mathbf{i} sono espressi in unità elettrostatiche, dovremo dividere questa espressine per c affinché il risultato si accordi con il primo membro che è espresso in u.e.m.: infine nel sistema misto scriveremo $c \text{rot}\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{E}}{dt} + 4\pi\mathbf{i}$. Se invece che allo spazio vuoto ci si

15 riferisce ad un mezzo di induttività ϵ_p al luogo di $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ figurerebbe $\frac{d\epsilon_p\mathbf{E}}{dt}$ ma noi ometteremo l'indice p che nel sistema di misure ora adottato è superfluo e scriveremo $c \text{rot}\mathbf{H} = \frac{d\epsilon\mathbf{E}}{dt} + 4\pi\mathbf{i}$.

Un'altra equazione che presenta con questa una incompleta simmetria ci è fornita dalla legge fondamentale dell'induzione elettrodinamica. La forza elettromotrice che produce per induzione in un circuito può essere considerata come la circuitazione di una forza elettrica lungo il circuito stesso. Orbene, secondo i concetti che informano questa trattazione, tale forza elettrica non risiede in una modificazione del conduttore, sibbene questo permette la sua manifestazione con la produzione di una corrente¹.

Ciò conduce a esprimere in forma del tutto generale la già stabilita legge dell'induzione con l'equazione $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ cioè nel vuoto $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{H}}{dt}$ e usando anche per questo il sistema di misura misto maxwelliano vi porremo $c \text{rot}\mathbf{E}$ al posto di $\text{rot}\mathbf{E}$, in modo che anche questa forza elettrica, sebbene non sia una forza elettrostatica, sia espressa in unità elettrostatiche, e scriveremo:

$$c \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad \text{per il vuoto e in un mezzo di induttività } \mu, \quad c \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mu\mathbf{H}}{dt}.$$

30 Confrontando le due equazioni, osserviamo in primo luogo: la loro simmetria è mancante in quanto che nel secondo membro della seconda equazione manca un termine analogo a quello che nel primo rappresenta la corrente elettrica. Ma, dopo quanto abbiamo detto nella prima parte, è superfluo aggiungere di ciò una spiegazione più ampia che questa: manca il termine perché non esiste il fenomeno che esso rappresenta. In secondo luogo: il vettore \mathbf{E} della prima equazione non ha per ora lo stesso significato che quello della seconda rappresentando quello la forza elettrostatica prodotta dalle cariche, l'altro una forza elettrodinamica.

¹ Un gas rarefatto, finché non è ionizzato, è isolante. Orbene, rapide variazioni di un intenso campo magnetico vi possono produrre degli effetti di scariche senza elettrodi che si manifestano con anelli luminosi concatenati appunto con le linee del campo magnetico variabile: ciò conferma sperimentalmente il concetto qui esposto.

Noi sappiamo già che la forza elettrica agente sopra una carica che si trova nel campo è la somma vettoriale delle due. Indicando dunque per maggior chiarezza il primo vettore con \mathbf{E}_C e il secondo con \mathbf{E}_F (i due indici sono le iniziali di Coulomb a Faraday) la f.e.m. totale sarà $\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_F$ e scriveremo le due equazio-

$$5 \quad \text{ni così} \quad c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{d\varepsilon \mathbf{E}_C}{dt} + 4\pi \mathbf{i} \quad c \operatorname{rot} \mathbf{E}_F = - \frac{d\mu \mathbf{H}}{dt} .$$

Il loro insieme non costituisce un sistema di equazioni fra due variabili, ma fra tre. Ogni problema a cui esso si volesse applicare rimarrebbe essenzialmente indeterminato, dico essenzialmente per significare ben altro che l'indeterminazione la quale si presenta caso per caso nell'integrazione di equazioni differenziali. Ciò renderebbe il sistema del tutto inutile perché ci manca un principio su cui fondare un'altra equazione. Questo punto è di capitale importanza e merita una attenta discussione.

Intanto osserviamo che, siccome il campo di forza elettrostatico è essenzialmente lamellare, così noi potremo nella seconda equazione aggiungere \mathbf{E}_C che è sempre nullo e scrivere $c \operatorname{rot}(\mathbf{E}_F + \mathbf{E}_C) = - \frac{d\mu \mathbf{H}}{dt}$ cioè $c \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{d\mu \mathbf{H}}{dt}$.

15 Sarà ammissibile fare qualcosa di simile per la prima equazione? La rappresentazione che era in valore ai tempi di Maxwell consisteva nel pensare i campi come modificazioni del mezzo similtorale riempiente tutto lo spazio e ciò portava a considerare il campo elettrico come la stessa cosa qualunque fosse la sua causa, sia la presenza di cariche elettriche, sia l'induzione elettrodinamica, cosicché anche nella prima equazione \mathbf{E} rappresentava senz'altro la totale forza elettrica. Ma per le ragioni ora espone noi non potremmo appellarsi ad una simile giustificazione. Ebbene, noi accetteremo la cosa come un'ipotesi non giustificata, suggerita dall'analogia. Vuol dire che l'esperienza deciderà (essa veramente ha già deciso da tanto tempo) se l'ipotesi è o non è conforme al vero. In questo caso le previsioni che si ottengono dall'integrazione del sistema delle due equazioni fra i due vettori \mathbf{E} e \mathbf{H} , saranno conformi al risultato dell'esperienza. Nel caso contrario, no; e l'ipotesi dovrebbe essere rigettata. Diciamo fin da ora che numerosissime esperienze e larghissime applicazioni hanno sempre confermato l'ipotesi.

30 Ciò abbiamo detto per procedere anche su questo punto a fin di logica, ma vogliamo osservare ancora:

1) Che questo procedimento di porre un'ipotesi non giustificata all'atto che si pone e attendere la conferma dall'esperienza è comune, classica nella fisica matematica.

2) Che dal punto di vista storico bisogna pure riconoscere il valore euristico che possono avere delle ideologie le quali sono destinate ad essere, almeno sotto certi rispetti, smentite o almeno superate nello sviluppo critico successivo; cosicché dobbiamo riconoscere come talvolta sia stato utile per lo sviluppo della scienza prendere per guida più la fantasia geniale e spregiudicata che la riflessione cauta e scrupolosa. Perché si deve essere sempre sicuri di questo: che in fin dei conti gli errori vengono eliminati e solo rimane la verità. Quello che più preme è conquistarla; ciò che più nuoce al progresso, anche nella scienza, è l'immobilità.

40 Infine, se si vanno a rivedere le origini delle teorie in tutti i rami della scienza si riconosce, forse in tutti i casi, che non sarebbero più ammissibili i presupposti fondamentali nella forma in cui allora furono formulati, ma ciò è l'effetto appunto di quel

progresso che non si poteva conseguire, se nelle prime mosse non si procedeva con un po' di coraggio, forse di temerarietà.

Così scritte le due espressioni maxwelliane, esse rappresentano una sintesi ottenuta con arduo processo d'induzione che manifestamente non può costituire una vera e propria dimostrazione della loro verità obbiettiva. Questa sarà provata sperimentalmente dalla verifica delle conseguenze che se ne possono ricavare con un processo d'integrazione, il quale naturalmente implicherà un'indeterminazione che sarà colmata dalle condizioni che determinano il particolare ordine dei fenomeni presi, volta per volta, in considerazione.

Per chiarire meglio questo punto osserviamo che se il sistema si scrive in forma cartesiana, esso consta dei sei equazioni tra le sei componenti dei due campi elettrico e magnetico nelle quali figurano come variabili indipendenti le coordinate e il tempo.

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} i_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} i_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} i_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mu H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mu H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mu H_z}{\partial t} \end{cases}$$

Sono dunque sei equazioni lineari di primo ordine alle derivate parziali: la loro integrazione importa un'indeterminazione di funzioni; l'assegnazione di queste stabilisce il particolare genere di fenomeno di cui si tratta.

3) Varie forme in cui si possono porre le equazioni maxwelliane.

Nello spazio vuoto in assenza di cariche, le equazioni si riducono alla loro forma più semplice che rappresenta una connessione fra due campi $[\mathbf{E}]$ e $[\mathbf{H}]$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad c \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{H}}{dt} .$$

Si capisce che in tale forma le equazioni possono essere valide in una porzione dello spazio comunque estesa, ma tale che da essa siano escluse le cariche elettriche, le quali debbono pure esistere se esistono i campi.

In uno spazio occupato in parte da conduttori e in parte da isolanti o anche occupato da un corpo che sia imperfettamente isolante, cioè non privo di una certa conduttività λ , nel secondo membro della prima figureranno due termini, e la stessa potrà scriversi $c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{d\varepsilon \mathbf{E}}{dt} + 4\pi \lambda \mathbf{E}$. Ma si può anche dare il caso che, oltre alle

correnti di conduzione, siano presenti anche correnti di convezione la cui densità sarà espressa da $\rho^+ \mathbf{v}^+ + \rho^- \mathbf{v}^-$ e allora il secondo membro della prima equazione conterrà tre termini $c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{d\varepsilon \mathbf{E}}{dt} + 4\pi \lambda \mathbf{E} + 4\pi (\rho^+ \mathbf{v}^+ + \rho^- \mathbf{v}^-)$.

In questa formula le proprietà del mezzo figurano rappresentate dalle costanti nel mezzo. E così servono alle applicazioni, per esempio, di carattere tecnico e in genere a tutte quelle applicazioni nelle quali si prendono i materiali come sono, avendone determinate le costanti caratteristiche, senza preoccuparsi della discussione dei fenomeni interni. Ma se, tenendo conto di quanto è stato discusso nei capitoli precedenti e specialmente nel quinto, noi vogliamo tener conto in linea generale della natura intrinseca dei fenomeni nei corpi conduttori e isolanti, noi osserveremo che la corrente

elettrica consiste sempre in un movimento di cariche elettriche, si presenti essa come corrente di conduzione o di convezione o di spostamento, dimodoché nella prima equazione il secondo membro si riduce a due soli termini, l'uno rappresenterà la corrente di spostamento maxwelliano nel vuoto, l'altra l'insieme della corrente reale di spostamento della corrente di conduzione e di quella visibilmente di convezione.

Avvertiamo però che nel secondo membro sono comprese anche le correnti di Ampère, le quali sono pure movimenti di cariche elettriche, dimodoché nel primo membro il vettore \mathbf{H} dovrebbe essere sostituito col vettore \mathbf{B} ; ma infine, se ben si considera, tale sostituzione sarebbe errata perché le equazioni ormai si riferiscono ai vettori quali sono nello spazio entro il quale si muovono le cariche; tutto ciò che spetta al mezzo materiale ambiente è espresso nel secondo termine del secondo membro della prima equazione; infine, ora tutto è ridotto a due enti fondamentali: lo spazio e le cariche.

Invece, dunque, di scrivere \mathbf{B} nel primo membro della I equazione, scriveremo nel secondo membro della II equazione, non $\mu\mathbf{H}$, ma semplicemente \mathbf{H} in quanto che le correnti di Ampère non figurano in questa equazione, ma nella prima sotto l'aspetto di correnti convettive. Il sistema dunque sarà scritto

$$c \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{E}}{dt} + 4\pi(\rho^+\mathbf{v}^+ + \rho^-\mathbf{v}^-) \quad c \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{H}}{dt} .$$

Non bisogna dimenticare che i due campi vettoriali $[\mathbf{E}]$ e $[\mathbf{H}]$ dovranno anche soddisfare rispettivamente l'equazione di Poisson e quella di Laplace,

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 .$$

Quanto alle forze agenti sopra ciascuna carica, la elettrostatica e la elettrodinamica, la loro risultante come sappiamo, è $\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_F$.

L'ultima scrittura delle equazioni di Maxwell ha portata teorica e non si presterebbe ad applicazioni pratiche, per le quali servono le forme precedenti.

In quel che segue mostriamo alcune delle più importanti conseguenze di queste equazioni, la cui verifica sperimentale, ripetiamo, è anche la verifica delle leggi generali espresse dall'equazione stessa.

4) Teorema di Poynting¹, vettore radiante.

Prendiamo la equazione di Maxwell nella forma

$$c \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{d\varepsilon\mathbf{E}}{dt} + 4\pi\lambda\mathbf{E} \quad - c \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{d\mu\mathbf{H}}{dt}$$

cioè consideriamo lo spazio come occupato da mezzi conduttori e isolanti, escludendo solo la presenza di correnti di convezione visibile. Moltiplichiamo scalarmente membro a membro la prima equazione per \mathbf{E} e la seconda per \mathbf{H} e sommiamo membro a membro. Si ottiene

$$\mathbf{E}\mathbf{x}\frac{d\varepsilon\mathbf{E}}{dt} + \mathbf{H}\mathbf{x}\frac{d\mu\mathbf{H}}{dt} + 4\pi\mathbf{E}\mathbf{x}\lambda\mathbf{E} = c(\mathbf{E}\mathbf{x}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{x}\operatorname{rot}\mathbf{E})$$

Il secondo membro si trasforma facilmente mediante l'identità vettoriale dimostrata al § ... dei Preliminari Matematici $\mathbf{A}\mathbf{x}\operatorname{rot}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{x}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\operatorname{div}(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})$.

Quanto al primo, siccome noi ci limitiamo a considerare mezzi isotropi, esso può essere semplificato in modo che scriveremo, essendo

¹ John Henry Poynting, 1852-1914, fisico britannico.

$$\mathbf{E} \times \frac{d\epsilon \mathbf{E}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\epsilon E^2}{dt} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} \times \frac{d\mu \mathbf{H}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\mu H^2}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\epsilon E^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\mu H^2}{dt} + 4\pi \lambda E^2 = -c \operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$$

E consideriamo ora un volume S compreso entro una superficie fissa a essendo *da* il vettore areola con verso rivolto all'esterno. Integrando nello spazio S , otterremo

$$5 \quad -\frac{d}{dt} \int_S \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \mu \frac{H^2}{2} \right) dS = 4\pi \int_S \lambda E^2 dS + \int_a c(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{x} da \quad \text{cioè, dividendo per } 4\pi,$$

$$-\frac{d}{dt} \int_S \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} dS = \int_S \lambda E^2 dS + \int_a \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{x} da \quad .$$

Il primo membro esprime la rapidità con cui nel tempo diminuisce l'energia complessiva (elettrostatica ed elettrodinamica) compresa entro il volume S ; il secondo membro esprime la somma di due potenze, la prima è la potenza trasformata in calore per effetto Joule nei conduttori, la seconda si presenta come il flusso di un vettore uscente dalla superficie che limita il volume S ; cioè come una fuga di energia verso questa superficie. E precisamente questo termine salva il principio della conservazione dell'energia. Si presenta come naturale dare dunque a questo vettore

15 $\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$ la denominazione di *vettore radiante*, ma spesso dal nome dell'illustre fisico-matematico a cui è dovuto questo importante teorema, esso viene detto vettore di Poynting.

Noi non abbiamo riferito questo teorema nella sua forma più generale che include sia mezzi anisotropi, sia altre forme di energia, cioè comprende anche i casi in cui siano presenti cariche elettriche mobili, pile voltaiche o termoelettriche e si presenti anche l'effetto di Peltier¹ e l'effetto di Thomson², perché tali argomenti non fanno oggetto della nostra trattazione e ci basta accennare alla possibilità di tali estensioni. Ci preme invece osservare che questo teorema ci presenta sotto un nuovo aspetto il concetto dell'energia localizzata nello spazio in quanto che se i due campi sono variabili nel tempo, questa energia deve essere concepita come propagantesi da un luogo a un altro, cioè come energia radiante; e nessun limite, nessuna barriera viene posta a questa sua propagazione. Questo teorema adunque ci presenta subito la possibilità di interpretare in generale i fenomeni dell'energia radiante, raggi luminosi, raggi calorifici, oscuri, ecc..

Il teorema ci mostra che nel caso di campi variabili il principio della conservazione dell'energia, non è valido entro uno spazio limitato, vale a dire non può essere valido per l'insieme dei corpi e cariche elettriche che formano un certo sistema di elementi interagenti. In particolare noi non possiamo considerare le interazioni elettrodinamiche come tali da dovere in se stesse soddisfare la legge della conservazione dell'energia; e quindi nemmeno l'altra legge generale meccanica a essa connessa, la conservazione della quantità di moto: in altri termini non è affatto necessario ammettere che le interazioni elementari elettrodinamiche appartengano al genere delle forze centrali, ipotesi alla quale Ampère si credé vincolato e che espresse nella sua memo-

¹ Una corrente elettrica che attraversa due giunzioni tra metalli diversi produce un trasferimento di calore. Jean Charles Athanase Peltier, 1785-1845, fisico francese.

² In un conduttore omogeneo con le estremità a temperature diverse, percorso da corrente, presenta scambio di calore secondo il verso della corrente. William Thomson (lord Kelvin), 1824-1907, fisico inglese di origine irlandese.

ria dichiarandosi newtoniano. In effetto il vettore radiante rappresenta una trasmissione di energia e anche una trasmissione d'impulso. E accenniamo che tale concetto presenta un'importante connessione con la termodinamica che ha dato luogo attraverso alle scoperte di Kirchoff¹, Bortoli, Boltzmann², Wien³, Planck⁴, a un ramo importantissimo della scienza teorica, fecondo di importanti applicazioni pratiche, che si raccoglie sotto il titolo *termodinamica delle radiazioni*.

5) Onde elettromagnetiche.

Tra le due equazioni di Maxwell si può eliminare uno dei vettori \mathbf{E} e \mathbf{H} : la simmetria del sistema fa prevedere che l'equazione che si ottiene in uno dei vettori avrà la stessa forma per l'uno e per l'altro. Mostriamo che tale equazione è del tipo della classica equazione di D'Alembert⁵, cioè dell'equazione che regola la propagazione delle onde.

Noi cominceremo dal caso dell'equazione nello spazio vuoto in assenza di cariche elettriche. A tal fine richiamiamo dai preliminari matematici l'identità vettoriale

15 $\text{rot rot}\mathbf{A} = \text{grad div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$ e osserviamo che nel nostro caso, tanto per l'uno quanto per l'altro vettore, manca il primo termine del secondo membro, cosicché potremo scrivere, per esempio $\text{rot rot}\mathbf{H} = \nabla^2\mathbf{H}$, ma dalla prima delle due equazioni abbiamo $c \text{rot}\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{E}}{dt}$.

20 Osservando che la derivazione rispetto al tempo e l'operazione indicata da rot sono permutabili, e ponendo per $\text{rot}\mathbf{E}$ il valore che si ricava dalla seconda equazione, otteniamo infine $\nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2\mathbf{H}}{dt^2} = 0$.

25 Siccome il ∇^2 è un operatore differenziale che, quando sia sviluppato contiene le derivate rispetto alle coordinate, mentre la derivata rispetto al tempo deve essere presa punto per punto rimanendo, come è il vettore, funzione del tempo, così per maggiore chiarezza nel seguente svolgimento analitico indicheremo la derivata rispetto al tempo con la notazione di una derivata parziale.

30 Il primo membro dell'equazione, considerato in sé come funzione differenziale di qualsiasi funzione φ delle coordinate (x, y, z) e del tempo t , prende il nome (salvo il segno che comunemente si prende opposto) di dalembertiano e si suole indicare con $\square\varphi$ cosicché il nostro problema ci ha portato a quello dell'integrazione dell'equazione di d'Alembert.

3) Onde piane.

35 Cominciamo da un caso semplice che cioè che nel campo che si considera, la funzione φ dipenda dalla sola x e dal tempo. Vedremo che con questa condizione è possibile trovare l'espressione dell'integrale generale dell'equazione. Il problema analiticamente è identico a quello classico della corda vibrante.

¹ Gustav Robert Kirchoff, 1824-1887, fisico tedesco.

² Ludwig Boltzmann, 1844-1906, fisico austriaco.

³ Wilhelm Wien, 1864-1928, fisico tedesco.

⁴ Karl Ernst Ludwig Max Planck, 1858-1947, fisico tedesco.

⁵ Jean Baptiste Le Rond d'Alembert, 1717-1783, fisico, matematico, astronomo e filosofo francese.

L'equazione assume la forma $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$ nella quale per generalità si posto nel luogo della c un coefficiente a positivo avente le dimensioni di una velocità. Poniamo $u = x + at$ $v = x - at$ da cui discende, indifferentemente per φ vettore o scalare:

$$5 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) a \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{2 \partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{2 \partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$$

E, sostituendo nella precedente, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = V(v)$$

dove V è una funzione della sola v , quindi $\varphi = \int V dv + f_2(u)$ cioè

$$10 \quad \varphi = f_1(v) + f_2(u) \quad \text{da cui, tornando alle variabili } x \text{ e } t$$

$$\varphi = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad \text{dove } f_1 \text{ e } f_2 \text{ sono funzioni arbitrarie d'integrazione le quali risulteranno caso per caso definite dalle condizioni ai limiti.}$$

La prima rappresenta la propagazione di una perturbazione nella direzione dell'asse x e nel verso positivo, la seconda nel verso negativo, entrambe con la velocità a che, nel caso presente coincide, con c .

Questa soluzione, per quanto rappresenti un particolare genere di fenomeni, contiene ancora dunque una vasta indeterminazione; qualunque genere di perturbazione si può propagare tanto nell'uno quanto nell'altro verso; a un certo istante, tanto il primo quanto il secondo termine si riducono a funzioni della x che danno la configurazione a quell'istante. Invece, per uno stesso valore della x , si riducono a funzioni di t che esprimono la successione dei fenomeni in un determinato luogo. Tale successione si ripete poi in identico modo in luoghi diversi con un ritardo tanto maggiore quanto più i luoghi sono lontani. Se le funzioni f_1 o f_2 sono funzioni periodiche, allora abbiamo in senso stretto una propagazione di onde rispettivamente nel verso positivo e nel verso negativo dell'asse. È manifesto che in questo caso ciascuna delle due funzioni rappresenta un sistema di onde piane che possono essere le onde luminose per un fascio di raggi paralleli.

Noi non considereremo altri casi fra i molti più o meno complicati che si possono presentare. Vogliamo invece passare a considerare come questo risultato si modifica se invece che dello spazio vuoto si tratta di uno spazio illimitato ripieno di un mezzo corporeo isolante che presenti le induttività ε , μ . Il lettore può da sé riconoscere che in tal caso al luogo di c si dovrà porre per a il valore $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. La velocità di propagazione risulterà dunque diversa che nel vuoto e in generale minore perché $\sqrt{\varepsilon\mu}$ è in ogni caso maggiore dell'unità e da essa, per tutti i corpi conosciuti, assai più diversa che nei casi in cui risulta minore. A questo punto dobbiamo però avvertire che, se si tratta di onde di elevata frequenza non si può attribuire a ε il valore costante corrispondente al caso statico: su questo punto ritorneremo fra breve.

Per precisare meglio la modalità della propagazione di onde elettromagnetiche nel caso che ci interessa, bisogna riprendere in considerazione l'equazione del campo, non bastando a tal fine la sola equazione di d'Alembert, che vale per onde di qualsiasi natura. Scriviamo le equazioni in forma cartesiana

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad \begin{cases} c \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ c \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ c \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad \begin{cases} c \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ c \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ c \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$5 \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad .$$

Le ipotesi che \mathbf{E} e \mathbf{H} siano funzioni della x e del tempo, cioè che la propagazione avvenga per onde piane e uniformi parallelamente all'asse x , porta all'annullamento delle derivate rispetto alle altre variabili; quindi il sistema si riduce a

$$10 \quad \begin{array}{lll} \frac{dE_x}{dt} = 0 & c \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} & c \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{dH_x}{dt} = 0 & c \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} & c \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{array}$$

Da cui si ricava $E_x = \text{cost}$ $H_x = \text{cost}$ che rappresentano un campo costante e uniforme elettrico e magnetico; esso non ha nessuna influenza sulla propagazione delle onde e perciò possiamo, agli effetti della propagazione, considerare

$$E_x = 0 \quad H_x = 0 \quad .$$

15 Scegliendo convenientemente gli assi in modo che resti la sola componente H_z , si riconosce dalle equazioni scritte che, per il campo elettrico, rimane da considerare la sola E_y . Dunque il vettore elettrico e magnetico dell'onda sono ciascuno perpendicolare alla direzione di propagazione c e all'altro. Così finalmente il sistema delle equazioni scritte si riduce alle sole due

$$20 \quad \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -c \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = -c \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad .$$

Osserviamo che se si assume la relazione

$$E_y = f(x - at) \quad H_z = \varphi(x - at) \quad \text{con} \quad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{sarà, posto} \quad x - at = u \quad ,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} f'(u) \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u) \quad .$$

Sostituendo questi valori nella prima delle due equazioni rimaste, si ha

$$25 \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} f'(u) = \varphi'(u) \quad \text{operando nello stesso modo per la seconda, si ha}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \varphi'(u) = f'(u) \quad \text{da cui, integrando rispetto a } u \quad \varphi(u) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} f(u) + \text{cost.}$$

ossia $H_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y + \text{cost.}$ Ma, al solito, la costante si può tralasciare per il nostro problema e scrivere per ciò che riguarda le onde $H_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y$.

Il vettore magnetico è a ogni istante e in ogni punto proporzionale a quello elettrico e nel vuoto eguale con le unità adottate che stabiliscono tra i due vettori un'omogeneità energetica. Il vettore radiante risulta parallelo all'asse x .

$$R_x = \frac{cE_y H_z}{4\pi} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y^2 = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_z^2$$

Le onde si propagano portando

con sé l'energia nel verso positivo dell'asse x . Se invece si considera l'integrale

$$E_y = f(x + at) \quad H_z = \varphi(x + at), \quad \text{non si fa che invertire il verso di tale}$$

propagazione. Se per esempio si pone

$$E_y = E_m \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad \text{essendo} \quad \frac{\lambda}{T} = a \quad \text{e, quindi,} \quad H_z = H_m \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

si hanno onde elettriche e magnetiche in concordanza di fase e un flusso pulsante di

$$\text{energia} \quad R_x = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m^2 \cos^2 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

?) Cenno sommario sulle onde elettromagnetiche in generale e sulle onde luminose.

In questo caso non abbiamo svolto la teoria elettromagnetica della luce, ma ne abbiamo fissati i principi fondamentali. Soprattutto abbiamo mostrato come dalle equazioni generali del campo nel vuoto discende la possibilità di onde propagantesi con una velocità espressa dal numero c che nelle unità C.G.S. ha valore di $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ pari $300.000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Che questo valore introdotto nelle nostre formule come modulo di ragguaglio tra le misure elettrostatiche e le misure elettromagnetiche della carica elettrica coincide con quello della velocità della luce era già stato scoperto da Weber¹ ed è stato confermato da numerosissime e svariate esperienze. In ciò consiste la principale e, si può dire, preventiva verifica della teoria elettromagnetica della luce. Se invece che del vuoto si tratta di un mezzo corporeo d'induttività elettrica ϵ e magnetica μ ,

non vi è da fare altra modificazione nei calcoli precedenti che introdurre nei secondi membri delle equazioni di Maxwell questi coefficienti perfettamente analoghi, con la sola differenza che la velocità di propagazione assume in quel mezzo il valore $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

cosicché l'indice di rifrazione di quel mezzo rispetto al vuoto (il cosiddetto indice assoluto dell'ottica) risulterebbe $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ che, ponendo $\mu = 1$, come è approssimativamente per i corpi trasparenti, si può scrivere $n = \sqrt{\epsilon}$.

L'indice di rifrazione dovrebbe risultare uguale alla radice quadrata della costante dielettrica, ma ciò non si verifica confrontando i valori degli indici delle costanti dielettriche determinate per via statica, d'altra parte tutti sanno che gli indici di rifrazione della luce dipendono dalla lunghezza d'onda (dispersione).

¹ Wilhelm Eduard Weber, 1804-1891, fisico tedesco.

Questa mancata verifica non infirma i concetti fondamentali della teoria perché si può spiegare pensando che gli spostamenti elettrici nel mezzo sotto l'effetto di campi alternati con frequenza grandissima seguono leggi diverse da quelle statiche valide anche per frequenze moderate. Così si giunge a concludere che la teoria finora trattata è semplicemente rispetto al meccanismo elettrico interno del corpo la cui costante dielettrica viene ad essere dipendente dalla frequenza. In questa linea si sono svolte le teorie della dispersione le quali si sono presentate come teorie della dispersione anomala quando vi si è introdotto il concetto della risonanza che implica un assorbimento selettivo.

Ma, per la storia, si deve assumere che in tali teorie tale concetto indispensabile della risonanza fu introdotto da Ketteler e dall'Helmholtz prima del concetto elettromagnetico, cosicché le teorie elettromagnetiche sono dapprima, in certo modo, un ritocco

.....ancora l'oscillatore Bose¹ e Lebedew² ottennero onde di solo qualche millimetro.

Tra queste e l'estremo dello spettro ultrarosso giace un intervallo che restò per lungo tempo inesplorato di onde che sono troppo lunghe per essere prodotte da corpi incandescenti e troppo brevi per essere prodotte con oscillatori, a meno di non superare enormi difficoltà. Queste furono vinte da Nicholson e Tears nel 1923 con la costruzione di apparecchi speciali. Questi fisici riuscirono a rilevare nel loro oscillatore frequenze alquanto maggiori di quelle che costituiscono l'estremo ultrarosso studiato da Rubens³.

Infatti lo spettro ultrarosso si può dire che comincia con radiazioni di lunghezza d'onda di circa 0,3 mm ottenute da Rubens con una lampada a vapore di mercurio, studiate col metodo dei raggi restanti dell'ioduro di potassio (riflessioni superstiti dopo replicate riflessioni sull'ioduro di potassio). Rubens e Hollnagen già avevano separato dalle radiazioni del becco Auber quelle di lunghezza d'onda vicina a 0,1 mm, con altre sostanze, lunghezze d'onda un po' più breve. Per tali radiazioni ultrarosse di grande lunghezza d'onda lo stesso Rubens aveva riconosciuto fatti di risonanza elettrica indicati dalla speciale riflessione sopra uno schermo di risonatori ottenuto ritagliando minutamente l'argentatura di uno specchio. Tali lunghezze d'onda mancano nello spettro sole a causa dell'assorbimento atmosferico, cosicché questo spettro comincia con la lunghezza d'onda di 5,3 micron. Da 0,8 micron a circa 0,4 micron si estende la regione del visibile cui segue il comune ultravioletto, che si studia fotograficamente con spettrografi a quarzo e lastre comuni fino a 0,29 micron, al di là l'assorbimento della gelatina costringe ad adoperare lastre speciali, per le parti ottiche, meglio del quarzo serve lo spatofluoro⁴, ma ben presto è necessario operare nel vuoto per il notevole assorbimento dell'aria; è questa la regione detta dal suo scopritore l'ultravioletto di Schumann⁵ che si estende fino a 0,12 micron; al di là non si possono più

¹ Jagadish Chandra Bose, 1858-1937, fisico e botanico indiano.

² Peter N. Lebedew, fisico russo.

³ Heinrich Rubens, 1865-1922, fisico tedesco.

⁴ Fluoruro di calcio, CaF₂.

⁵ Victor Schumann, 1841-1913, fisico tedesco.

usare strumenti diottrici, ma solo reticoli a riflessione ed abbiamo l'ultravioletto di Lyman¹(?) e quindi l'ultravioletto di Millikan². Speciali esperienze di Halvech permettono di riconnettere questo al vero e proprio campo di raggi Röntgen³ che si suole far cominciare da $\lambda = 12 \text{ \AA} (10^{-10}\text{m})$ fino a circa $0,057 \text{ \AA}$ Angstrom che rappresentano le più brevi lunghezze d'onda prodotte artificialmente fino ad ora. A tale regione si sovrappone in parte quella dei raggi delle sostanze radioattive, che arrivano a lunghezze d'onda ancora più brevi. Così abbiamo una successione graduale di fenomeni tutti della stessa intrinseca natura le cui differenze sono del genere di una differenza di colore, ma l'enorme ampiezza in cui varia la frequenza, ossia la lunghezza d'onda, conferisce a queste radiazioni caratteri e manifestazioni estremamente diverse e dà luogo a applicazioni svariatissime.

¹ Theodore Lyman, 1874-1954. Fisico USA.

² Robert Andrews Millikan, 1868-1953, fisico USA.

³ Wilhelm Conrad Röntgen, 1845-1923, fisico tedesco.

INDICE

	pagina
Note del curatore	2
5 Introduzione.....	3
Preliminari	4
Preliminari matematici	8
Parte terza. La corrente elettrica.....	28
Cap. IV. Leggi fondamentali dell'elettrodinamica	39
10 Cap. V. Teoria elettrodinamica del magnetismo.....	75
Parte II. Seguito della teoria elettrodinamica del magnetismo	92
Parte II. Campi variabili nel tempo	103
Indice	116

15

20

25

FSNE

30